



Cours de segmentation d'images

Partie 2 – Morphologie mathématique

Master M2TI - Paris V

John Chaussard

LAGA – Université Paris 13
chaussard@math.univ-paris13.fr

13

Introduction à la morphologie

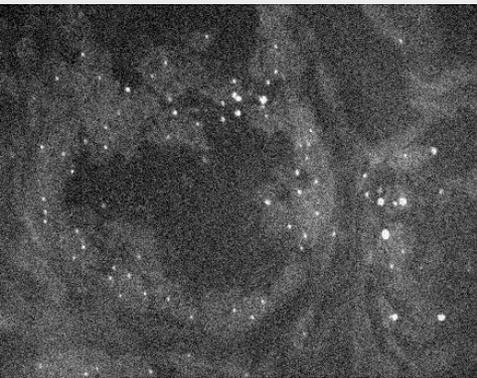
Petit historique de la morphologie

Développée par **Georges Matheron** et **Jean Serra** en 1964, à l'École de Mines de Paris

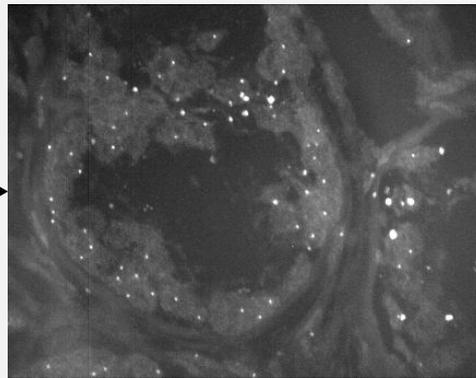
Initialement dans le but de répondre à des problèmes liés à l'exploitation minière

Utilisée dans beaucoup de domaines où le traitement d'images est nécessaire : biologie, multimédia, ...

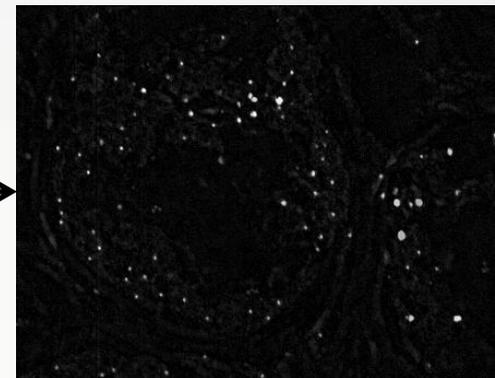
Les étapes d'un traitement morphologique



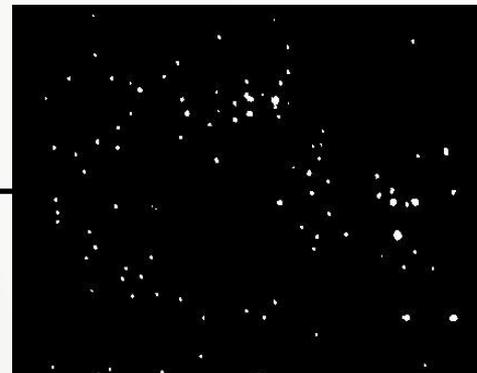
(image originale)



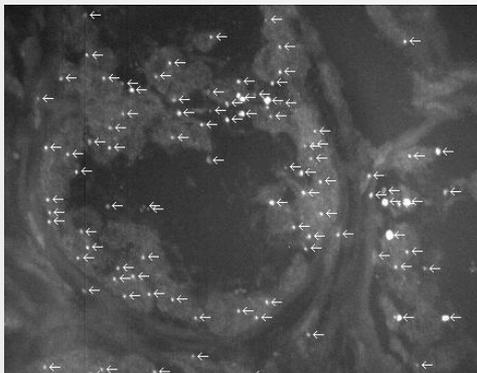
(image améliorée)



(image segmentée)



(segmentation améliorée)



(extraction d'information)

Éléments essentiels pour la suite

Image binaire, éléments structurants

Pour commencer, nous allons définir les images binaires.

Dans une telle image, on identifie deux types de pixels : les **pixels appartenant à un objet spécifique**, et les **pixels appartenant à son complémentaire**.

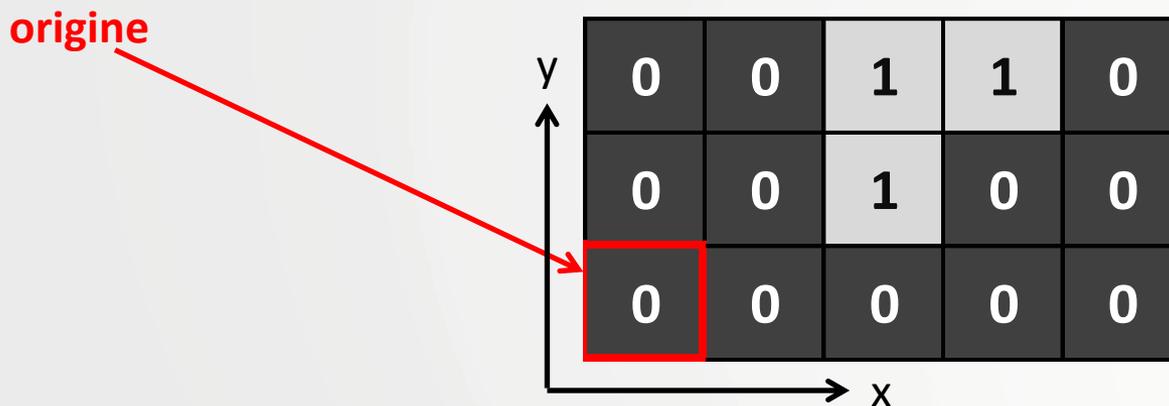
Une image binaire de dimension n peut être vue comme un sous ensemble de \mathbb{Z}^n , où on liste simplement les coordonnées des pixels appartenant à l'objet.

Ex : $I = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2)\}$

Image binaire, éléments structurants

On peut aussi bien les représenter comme des ensembles ou comme des tableaux où les pixels appartenant à l'objet seront notés 1 (en clair), et les pixels du complémentaire seront notés 0 (en foncé).

Ex : $I = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2)\}$



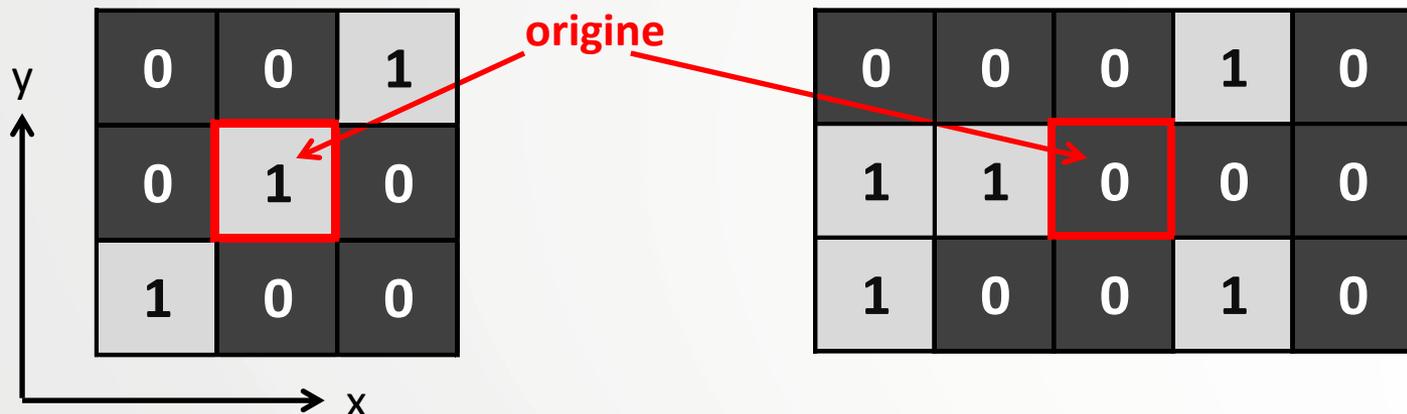
Dans tous les cas, il est nécessaire de définir, dans le tableau, un pixel comme étant l'origine. 7

Les éléments structurants

En morphologie, les transformations reposent sur le choix d'un **élément structurant** : il s'agit d'une image binaire de l'espace discret \mathbb{Z}^n .

- On le représente souvent par une image où l'origine est au centre, les points de l'élément structurant sont à **1 (en clair)** et les autres points sont à **0 (en foncé)**. L'origine apparaîtra encadrée en rouge.

Ex (2d) : $E = \{ (-1,-1), (0,0), (1,1) \}$ $E = \{ (-2,-1), (-2,0), (-1,0), (1,-1), (1,1) \}$



Les éléments structurants

On distingue, en 2d, deux éléments structurants importants : Γ_4 et Γ_8 , qui associent respectivement à un point ses 4 voisins et ses 8 voisins.

$$\Gamma_4 = \{(-1,0), (1,0), (0,0), (0,1), (0,-1)\}$$

0	1	0
1	1	1
0	1	0

$$\Gamma_8 = \Gamma_4 \cup \{(-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1)\}$$

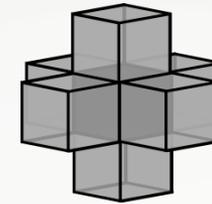
1	1	1
1	1	1
1	1	1

On note aussi $\Gamma_4^* = \Gamma_4 \setminus \{(0,0)\}$ et $\Gamma_8^* = \Gamma_8 \setminus \{(0,0)\}$.

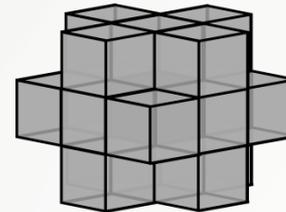
Les éléments structurants

On distingue, en 3d, trois éléments structurants importants : Γ_6 , Γ_{18} et Γ_{26} , qui associent respectivement à un point ses 6 voisins, ses 18 voisins et ses 26 voisins.

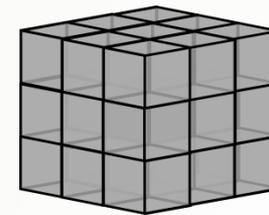
$$\Gamma_6 = \{(0,0,0), (-1,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1)\}$$



$$\Gamma_{18} = \Gamma_6 \cup \{(-1,-1,0), (-1,1,0), (1,-1,0), (1,1,0), (-1,0,-1), (-1,0,1), (1,0,-1), (1,0,1), (0,-1,-1), (0,-1,1), (0,1,-1), (0,1,1)\}$$



$$\Gamma_{26} = \Gamma_{18} \cup \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1), (-1,-1,-1)\}$$



On note aussi $\Gamma_6^* = \Gamma_6 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\Gamma_{18}^* = \Gamma_{18} \setminus \{(0,0,0)\}$ et $\Gamma_{26}^* = \Gamma_{26} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Les éléments structurants

Exercice : dessinez l'élément structurant correspondant à cet ensemble de points de \mathbb{Z}^2 :

$$E = \{(-2,-1),(-1,-2),(0,-2),(1,-2),(2,-1),(-1,2),(-1,1),(1,2),(1,1)\}$$

Solution :

0	1	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0

Les éléments structurants

Exercice : quel ensemble correspond à cet élément structurant 2d ?

0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Solution : $E = \{(-2,0),(-2,-1),(-1,0),(-1,-1),(2,0),(1,0),(0,0),(-1,0),(1,1),$
 $(1,0),(1,-1)\}$

Les éléments structurants

Pour finir avec les éléments structurants, on définit l'application d'un élément structurant à un point de l'espace :

Soit $E \subset \mathbb{Z}^n$ (E est un élément structurant de \mathbb{Z}^n), et soit $x \in \mathbb{Z}^n$.

L'application de E sur x est $E_x = \{v + x \mid v \in E\}$.

On peut voir E_x comme la translation de E par x .

Les éléments structurants

Par exemple, posons :

- $x = (1,1)$
- $E = \{(-2,-1),(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,1),(1,0),(1,-1),(2,1),(2,0)\}$
- $E_x = \{(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,2),(2,1),(2,0),(3,2),(3,1)\}$

0	0	0	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0

E

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

x

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

E_x

Introduction

Dans la suite, on s'intéressera surtout aux **images 2d en niveau de gris 8 bits**.

On peut voir toute image en niveau de gris comme un relief topographique, où les valeurs élevées sont des montagnes tandis que les valeurs basses sont des fossés.



L'érosion en niveaux de gris

Définition

On peut définir l'érosion binaire, tout comme l'érosion en niveau de gris, en termes de minimum :

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ (I est donc une image n -dimensionnelle de domaine A et dont les valeurs d'arrivée se situent dans B),
 et $E \subset \mathbb{Z}^n$ un élément structurant.

On définit **l'érosion** de I par E l'application notée $I \ominus E$ telle que,

$$\forall x \in A, (I \ominus E)(x) = \text{Min}_{y \in E_x} I(y)$$

On dira que $\forall y \notin A, I(y) = +\infty$. Ceci fait sens si l'élément structurant contient l'origine (ce qui est souvent le cas en pratique).

Un exemple

Ex : Calculer $I \ominus E$

1	1	0
0	1	1
0	1	0

E

82	76	81	81	81	75
80	77	80	84	79	78
82	82	84	80	83	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112
100	110	109	112	110	115

I

76	76	80	81	75	75
77	76	76	79	78	75
80	77	77	80	79	78
82	82	82	80	80	83
91	91	92	94	93	93
100	100	100	103	103	110

$I \ominus E$

Un autre exemple

Ex : Calculer $I \ominus E$

1	0	0
0	1	1
0	0	1

E

Si l'élément structurant ne contient pas l'origine, alors on peut avoir des infinis dans le résultat de l'érosion.

82	76	81	81	81	75
80	77	80	84	79	78
82	82	84	80	83	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112
100	110	109	112	110	115

I

76	81	79	75	75	" $+\infty$ "
77	76	79	78	78	75
80	77	80	83	79	78
82	82	84	80	83	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112

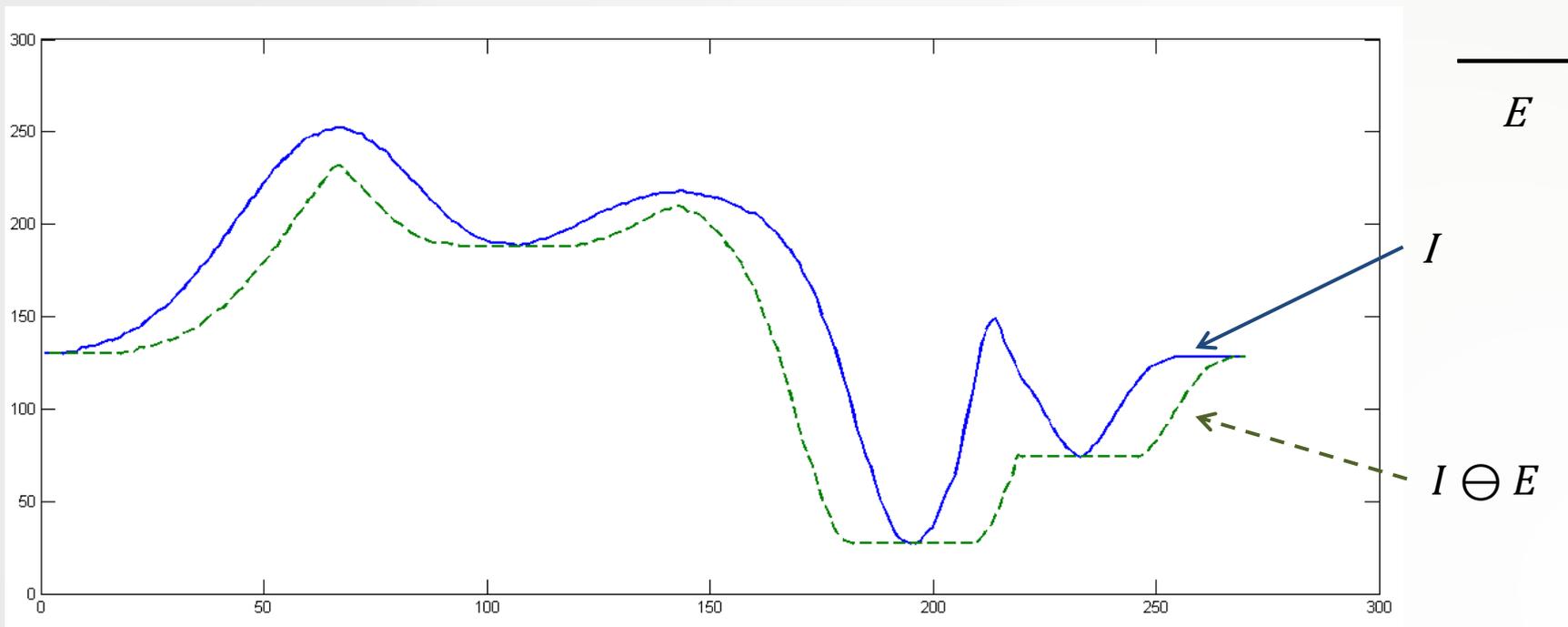
$I \ominus E$

Effet de l'érosion sur le relief de l'image

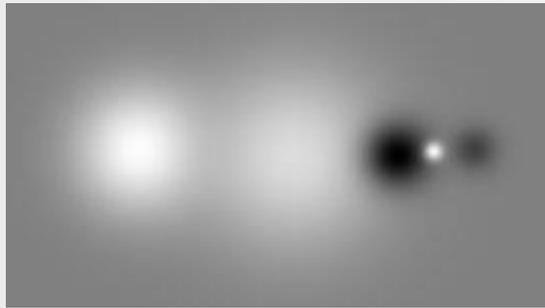
Regardons l'effet « topographique » de l'érosion

On considère I comme un relief, avec ses montagnes et ses canyons.

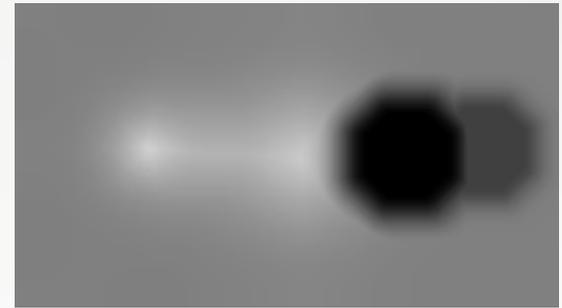
L'érosion de I par E revient à creuser les flancs de terre de I avec E : l'érosion **rétrécit** (en hauteur et largeur) **les montagnes**, et **élargit les trous**.



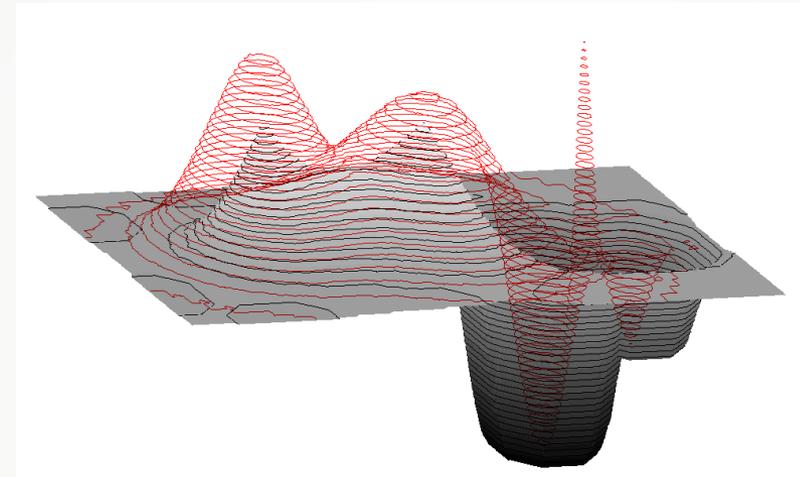
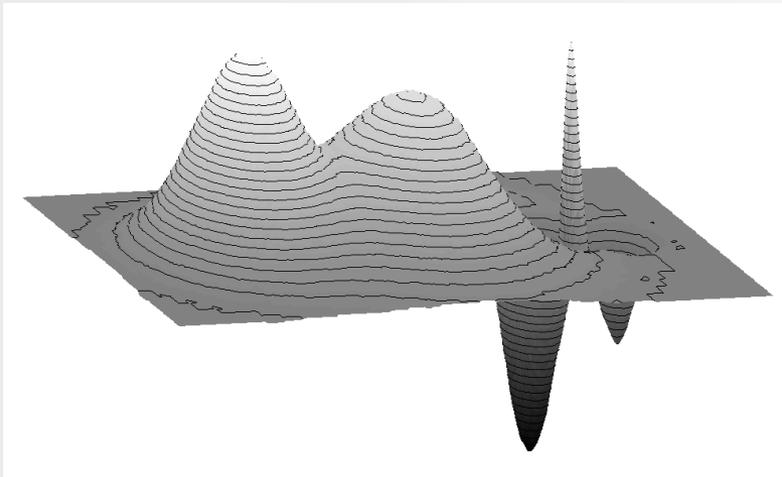
Effet de l'érosion sur le relief de l'image



I



$I \ominus E$



La dilatation en niveaux de gris

Définition

Avant tout, il est nécessaire de définir un nouveau symbole sur les éléments structurants :

Soit $E \subset \mathbb{Z}^n$ un élément structurant.

On note $\check{E} = \{-x \mid x \in E\}$

Ex :

0	1	0
0	1	1
0	1	1

E

1	1	0
1	1	0
0	1	0

\check{E}

L'élément structurant \check{E} est la rotation de 180° de E .

Définition

On peut définir la dilatation binaire, tout comme la dilatation en niveau de gris, en termes de maximum:

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subset \mathbb{Z}^n$ un élément structurant.

On définit **la dilatation** de I par E l'application notée $I \oplus E$ telle que,

$$\forall x \in A, (I \oplus E)(x) = \text{Max}_{y \in \check{E}_x} I(y)$$


On dira que $\forall y \notin A, I(y) = -\infty$. Ceci fait sens si l'élément structurant contient l'origine (ce qui est souvent le cas en pratique).

Exemple

Ex : Calculer $I \oplus E$

0	1	0
0	1	1
0	1	1

E

1	1	0
1	1	0
0	1	0

\check{E}

82	76	81	81	81	75
80	77	80	84	79	78
82	82	84	80	83	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112
100	110	109	112	110	115

I

82	82	81	84	81	81
82	82	84	84	84	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112
102	110	109	112	110	115
102	110	110	112	112	115

$I \oplus E$

Un autre exemple

Ex : Calculer $I \oplus E$

0	0	1
0	0	1
0	0	1

E

1	0	0
1	0	0
1	0	0

\check{E}

Si l'élément structurant ne contient pas l'origine, alors on peut avoir des infinis dans le résultat de la dilatation.

82	76	81	81	81	75
80	77	80	84	79	78
82	82	84	80	83	84
91	92	94	96	93	96
102	100	103	103	110	112
100	110	109	112	110	115

I

" $-\infty$ "	82	77	81	84	81
" $-\infty$ "	82	82	84	84	83
" $-\infty$ "	91	92	94	96	93
" $-\infty$ "	102	100	103	103	110
" $-\infty$ "	102	110	109	112	110
" $-\infty$ "	102	110	109	112	110

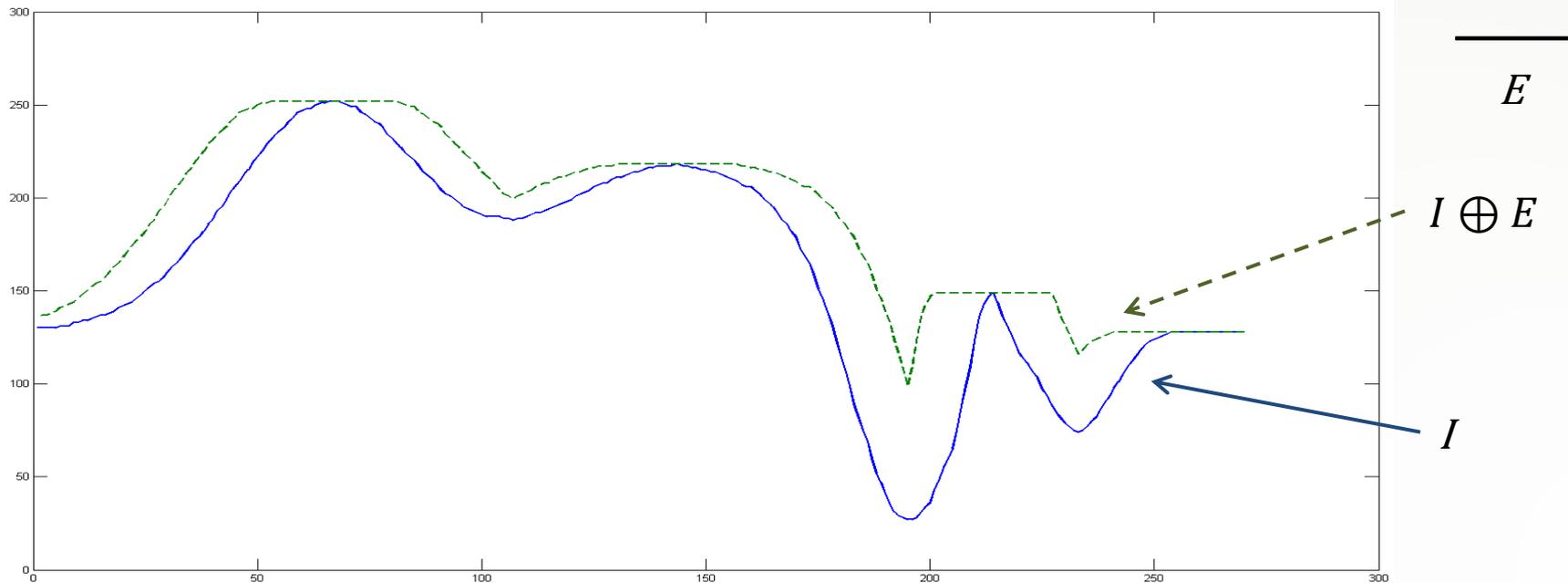
$I \oplus E$

Effet de la dilatation sur le relief de l'image

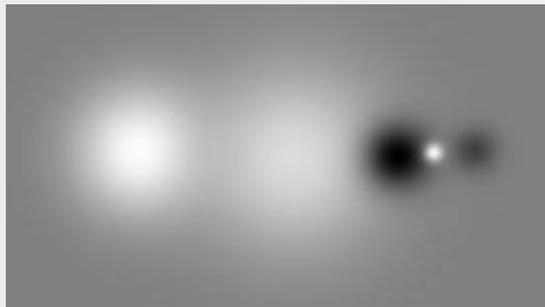
Regardons l'effet « topographique » de la dilatation

On considère I comme un relief, avec ses montagnes et ses canyons.

La dilatation de I par E revient à élargir les flancs de terre de I avec E : la dilatation **élargit les montagnes**, et **rétrécit** (en hauteur et largeur) **les trous**.



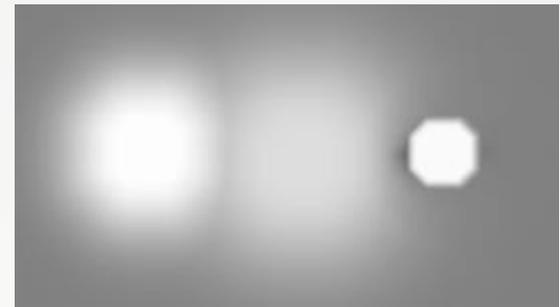
Effet de la dilatation sur le relief de l'image



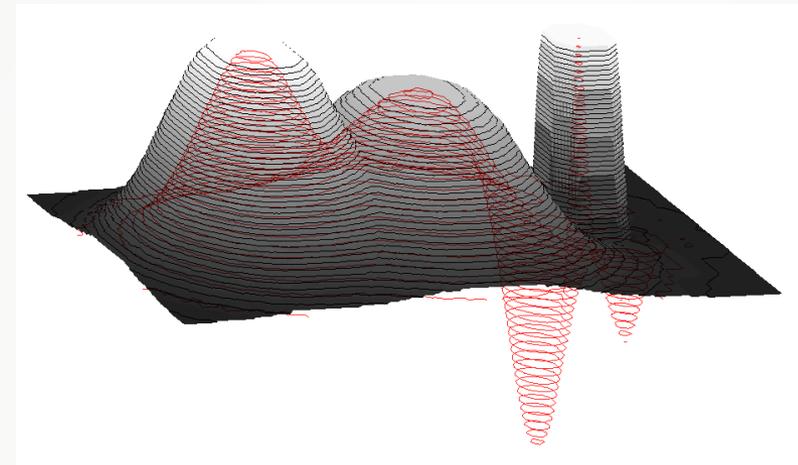
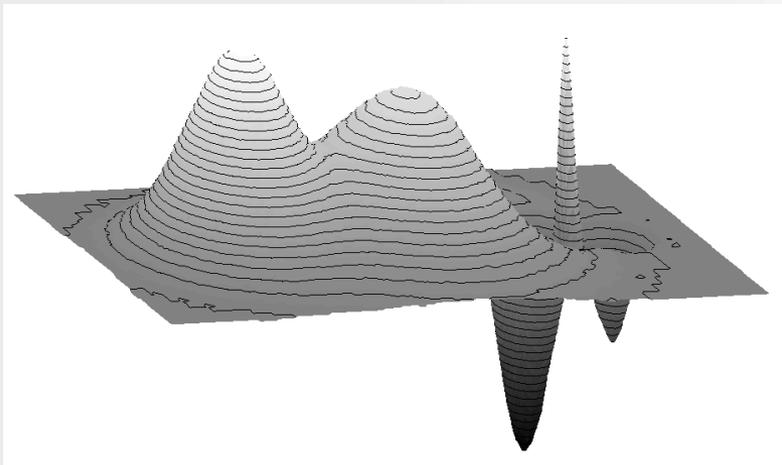
I



E



$I \oplus E$



Propriétés de l'érosion et de la dilatation

Propriétés de la dilatation

On peut noter quelques propriétés intéressantes de la dilatation :

.La dilatation est **associative** : $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

.La dilatation est **commutative** : $A \oplus B = B \oplus A$

Si on note $B \oplus B \oplus \dots \oplus B = nB$, alors

$$A \oplus B \oplus B \oplus \dots \oplus B = A \oplus nB$$

Plutôt que de faire n dilatations sur A (qui peut être une grande image), on peut $(n-1)$ dilatations de B (qui est généralement petit), et une seule dilatation sur A (plus rapide).

Propriétés de l'érosion

On ne possède pas ces propriétés pour l'érosion :

0	0	0
1	1	1
0	0	0

B

0	1	0
0	1	0
0	1	0

C

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0

A

0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$(A \ominus B) \ominus C$

$$B \ominus C = \emptyset \text{ donc } A \ominus (B \ominus C) = \mathbb{Z}^2 \neq (A \ominus B) \ominus C$$

$$B \ominus A = \emptyset \text{ donc } A \ominus B \neq B \ominus A$$

La décomposabilité

On possède néanmoins une propriété intéressante pour l'érosion qui s'appelle la **décomposabilité** :

$$A \ominus (B \oplus C) = A \ominus B \ominus C$$

Cette propriété explique si un élément structurant peut être **décomposé en plusieurs dilatations**, alors on peut effectuer une érosion par cet élément structurant en faisant plusieurs érosions successives.

La décomposabilité

A quoi peut servir la décomposabilité ?

Imaginons le problème suivant : on veut calculer l'érosion de A par D , mais on ne possède pas beaucoup de mémoire. Impossible de charger A complètement dans la mémoire de l'ordinateur !

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

D

On remarque que $D = B \oplus C$

0	0	0
1	1	1
0	0	0

B

0	1	0
0	1	0
0	1	0

C

La décomposabilité

Grâce à la propriété de décomposabilité, on sait que

$$A \ominus D = A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$$

L'intérêt est le suivant : B est un élément structurant qui ne « regarde » que les pixels de A situés sur une même ligne. On peut donc effectuer une érosion par B en envoyant A , dans le module d'érosion, ligne par ligne (et éviter de devoir charger toute l'image en mémoire).

Le même argument s'applique pour C à propos des colonnes de A .

1	1	1
1	1	1
1	1	1

D

0	0	0
1	1	1
0	0	0

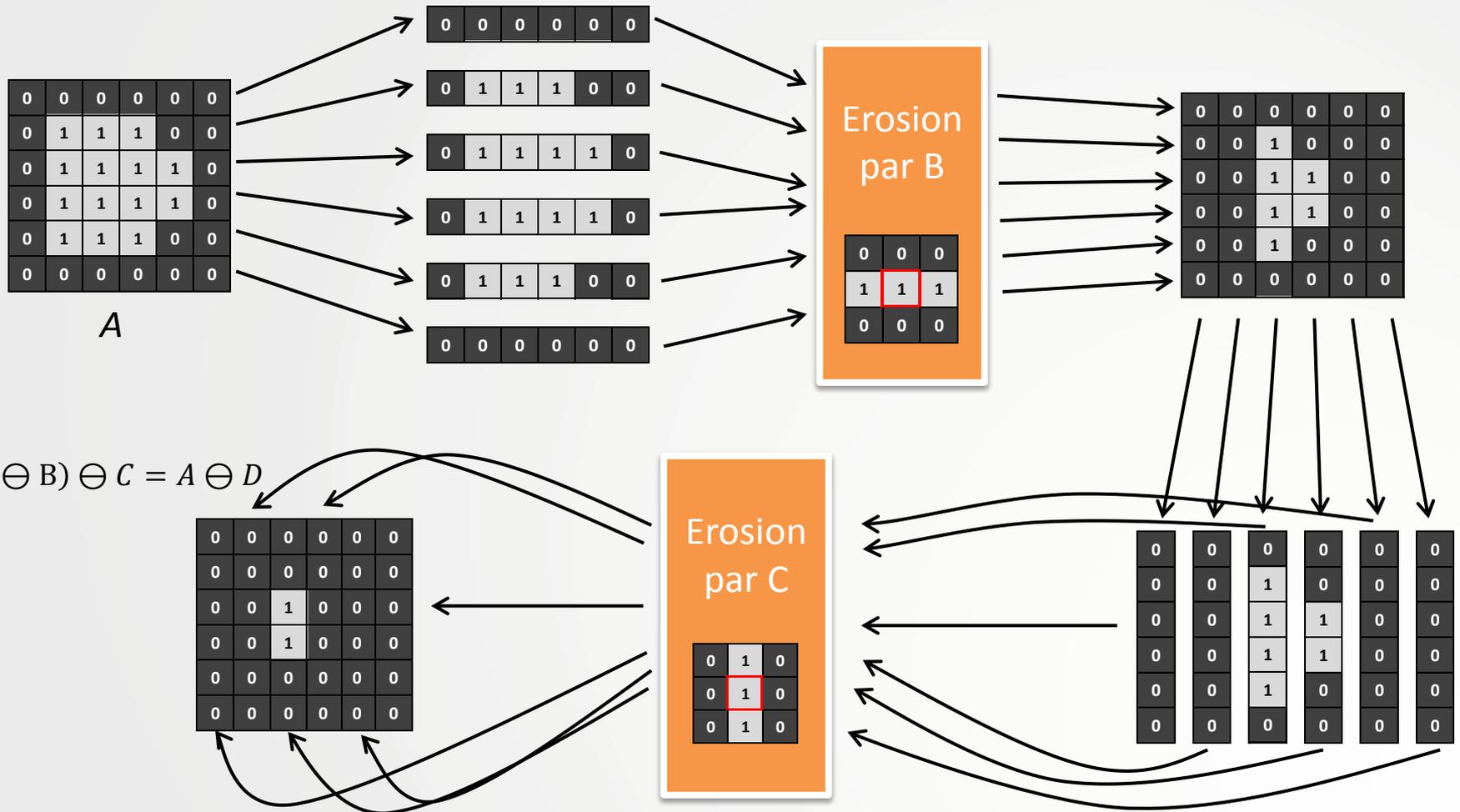
B

0	1	0
0	1	0
0	1	0

C

La décomposabilité

Solution : On effectue d'abord une érosion par B, puis par C.



La décomposabilité

La dilatation respecte aussi la propriété de décomposabilité :

$$A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

Cette propriété explique si un élément structurant peut être décomposé en plusieurs dilatations, alors on peut effectuer une dilatation par cet élément structurant en faisant plusieurs dilatations successives.

Dualité

La dilatation par E et l'érosion par \check{E} en niveau de gris sont des **opérateurs duaux**.

Si on pose $I^c(x) = -I(x)$, alors

$$(I \oplus E)(x) = (I^c \ominus \check{E})^c(x)$$

Translation

La dilatation et l'érosion sont invariantes par translation de l'image, mais **les choses sont différentes** pour la translation de l'élément structurant :

Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$,

$$A_x \oplus E = (A \oplus E)_x$$

$$A_x \ominus E = (A \ominus E)_x$$

$$A \oplus E_x = (A \oplus E)_x$$

$$A \ominus E_x = (A \ominus E)_{-x}$$

Relation d'ordre entre les images

On définit une relation d'ordre entre les images en niveau de gris :

Soient deux images $I, J: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$,

$$I \leq J \leftrightarrow \forall x \in A, I(x) \leq J(x)$$

Cette relation d'ordre est partielle.

Maximum et minimum

On définira aussi le maximum et le minimum de deux images :

$$\begin{aligned} \text{Soient deux images } I, J: A \subset \mathbb{Z}^n &\rightarrow B, \forall x \in A \\ (I \vee J)(x) &= \text{Max}(I(x), J(x)) \\ (I \wedge J)(x) &= \text{Min}(I(x), J(x)) \end{aligned}$$

Croissance

La dilatation et l'érosion sont toutes deux des **opérateurs croissants du point de vue de l'image** :

Si $A_1 \leq A_2$, alors

$$(A_1 \oplus E) \leq (A_2 \oplus E)$$

$$(A_1 \ominus E) \leq (A_2 \ominus E)$$

Du **point de vue de l'élément structurant**, la **dilatation est croissante** tandis que **l'érosion est décroissante** :

Si $E_1 \subseteq E_2$, alors

$$(A \oplus E_1) \leq (A \oplus E_2)$$

$$(A \ominus E_2) \leq (A \ominus E_1)$$

Extensivité

Enfin, si l'élément structurant contient l'origine, alors **la dilatation est extensive** et **l'érosion est anti-extensive** (du point de vue de l'image).

$$0^n \in E \Rightarrow \begin{cases} A \leq (A \oplus E) \\ (A \ominus E) \leq A \end{cases}$$

Erosion et dilatation : propriétés

Nous possédons **une autre propriété de décomposabilité** plus forte que celle déjà vue.

Cette propriété porte sur la décomposition d'un élément structurant en deux maximums :

Soient $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E, F \subset \mathbb{Z}^n$,

$$I \oplus (E \vee F) = (I \oplus E) \vee (I \oplus F)$$

$$I \ominus (E \vee F) = (I \ominus E) \wedge (I \ominus F)$$

Rappel : I est l'image, E et F sont les éléments structurants.

Détecteur de contour (gradient morphologique)

Rappels

L'érosion permet de creuser les flancs d'une image, ce qui provoque un rétrécissement (en altitude et en largeur) de ses montagnes, et un élargissement (rien en profondeur) des ses canyons.

La dilatation permet d'élargir (rien en altitude) **les montagnes** d'une image, et **rétrécit** (en largeur et profondeur) **ses canyons**.

Erosion et Dilatation d'une image

E est un disque euclidien de rayon 20.



I



$I \oplus E$



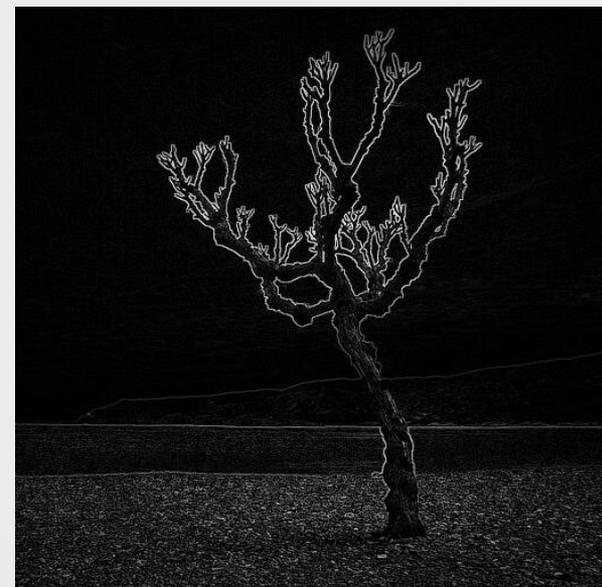
$I \ominus E$

Gradient

Nous pouvons détecter les contours d'une image avec l'érosion et la dilatation.



I



$$(I \oplus \Gamma_4) - I$$



$$I - (I \ominus \Gamma_4)$$



$$(I \oplus \Gamma_4) - (I \ominus \Gamma_4) \quad 47$$

Gradient : définition

Soit une image A et un élément structurant F , **on peut définir trois méthodes de gradient** :

Le gradient interne : $\nabla_F^I(A) = A - (A \ominus F)$

Le gradient externe : $\nabla_F^E(A) = (A \oplus F) - A$

Le gradient morphologique : $\nabla_F(A) = (A \oplus F) - (A \ominus F)$

En général, on choisit Γ_4 ou Γ_8 pour extraire les contours d'une image 2d, et Γ_6 , Γ_{18} ou Γ_{26} pour une image 3d.

Ouverture en niveaux de gris

Définition

L'ouverture en niveaux de gris se définit ainsi :

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subseteq \mathbb{Z}^n$, on définit **l'ouverture** de I par E comme

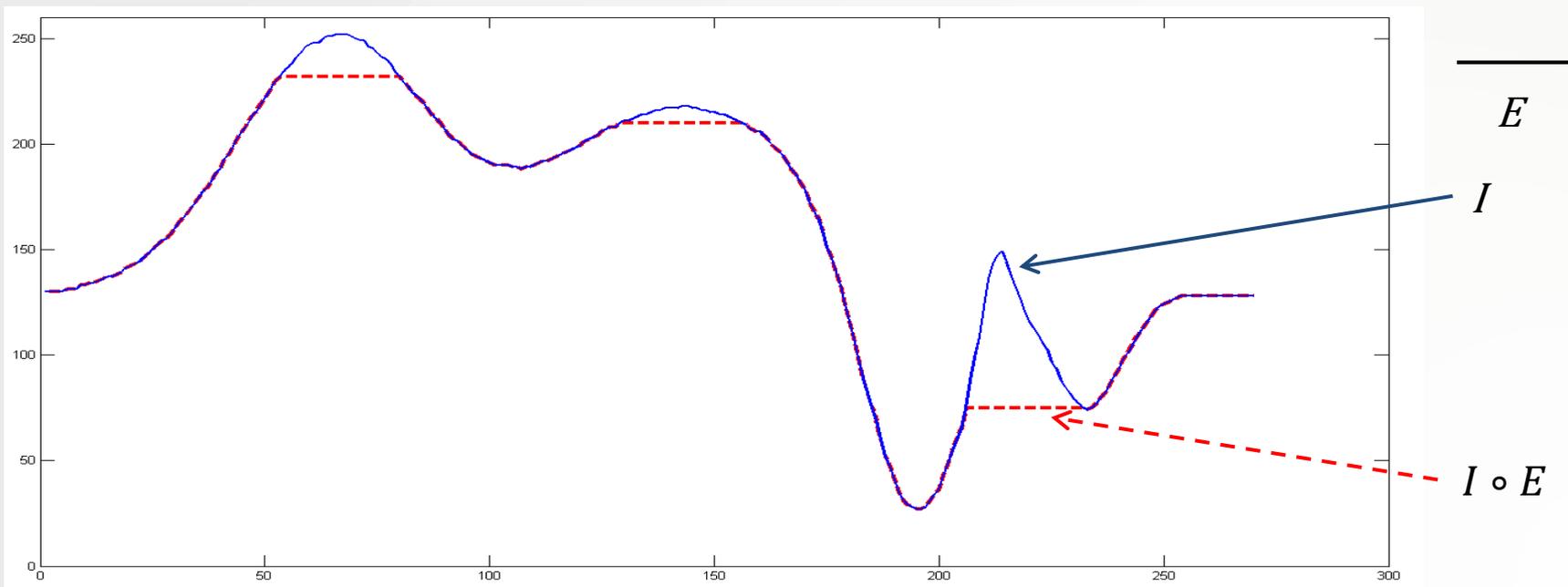
$$I \circ E = (I \ominus E) \oplus E$$

Effet de l'ouverture sur le relief de l'image

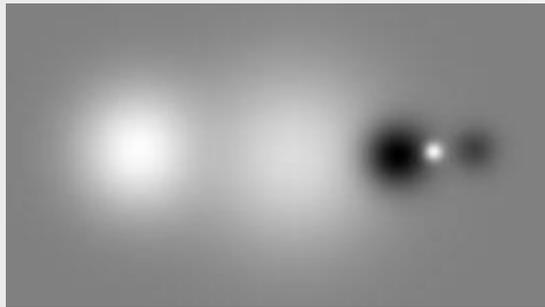
Regardons l'effet « topographique » de l'ouverture

On considère I comme un relief, avec ses montagnes et ses canyons.

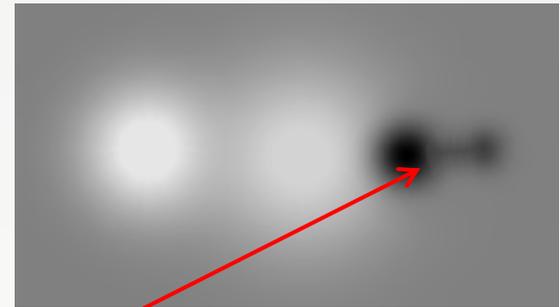
L'ouverture de I par E revient à **raser les montagnes** moins larges que E .



Effet de l'ouverture sur le relief de l'image

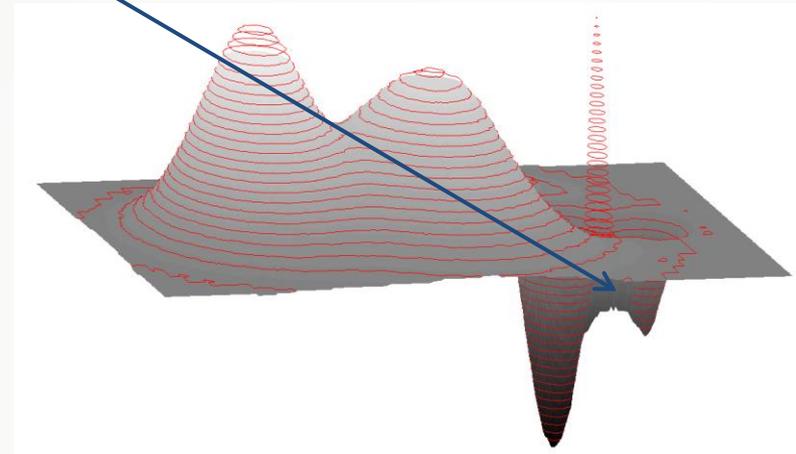
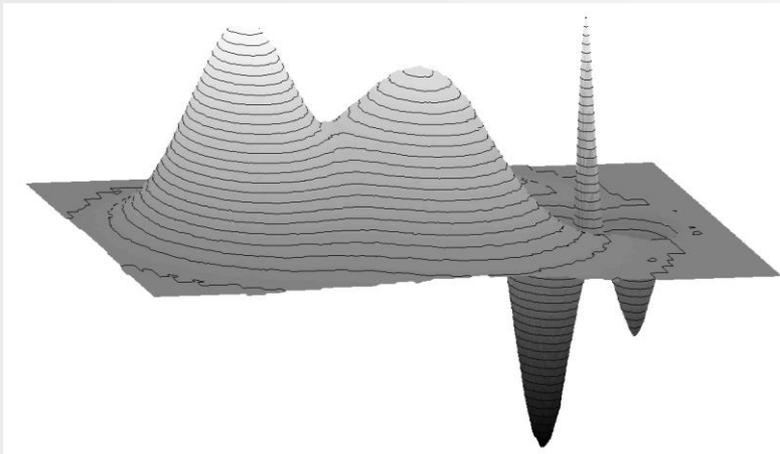


I



$I \circ E$

Remarquez l'effet de creusement ici



La fermeture en niveaux de gris

Définition

La fermeture en niveaux de gris se définit ainsi :

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subseteq \mathbb{Z}^n$, on définit **la fermeture** de I par E comme

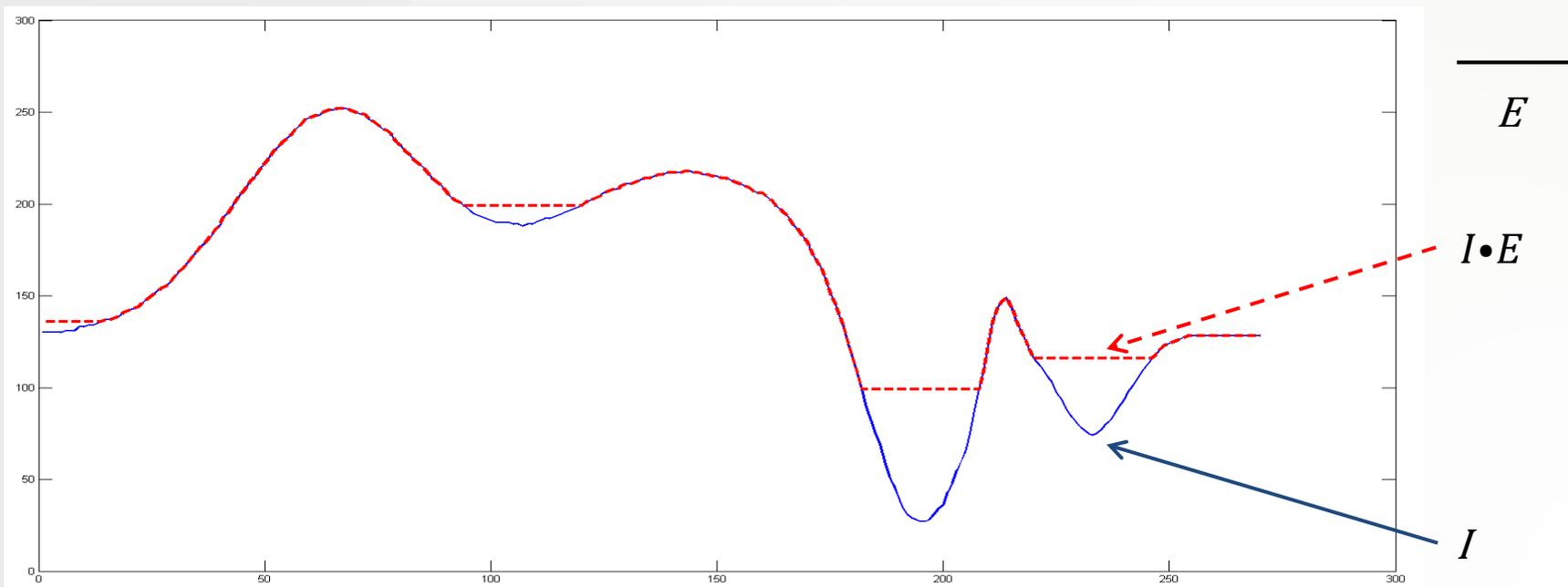
$$I \bullet E = (I \oplus E) \ominus E$$

Effet de la fermeture sur le relief de l'image

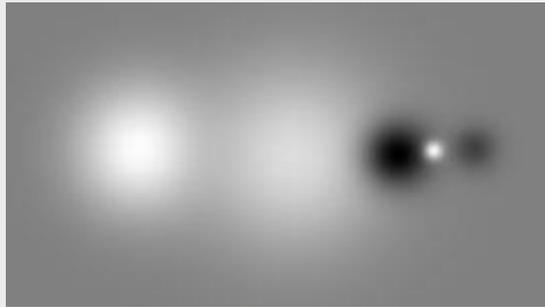
Regardons l'effet « topographique » de la fermeture

On considère I comme un relief, avec ses montagnes et ses canyons.

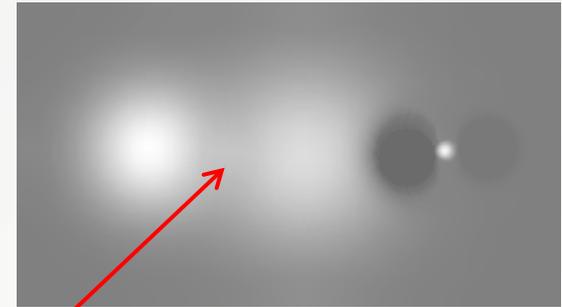
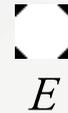
La fermeture de I par E revient à **combl**er les ravins plus étroits que E .



Effet de la fermeture sur le relief de l'image

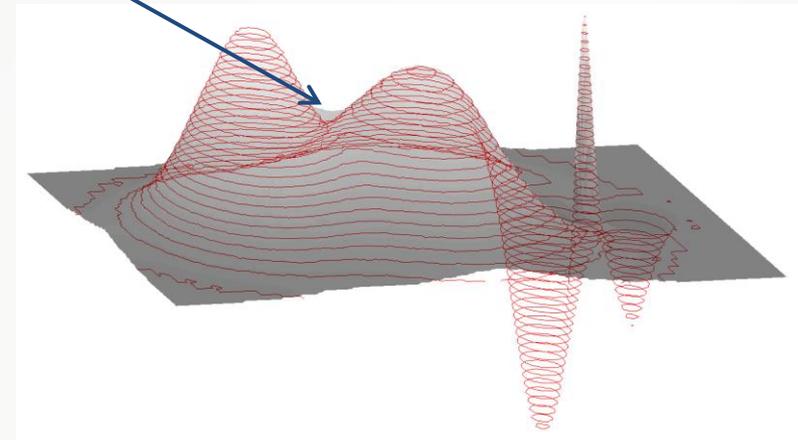
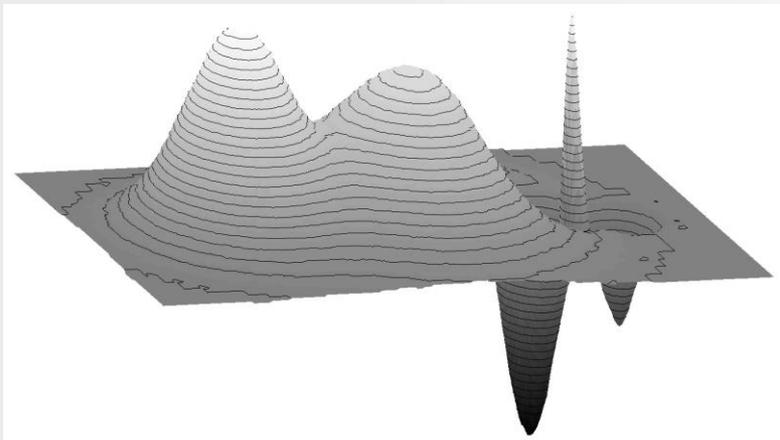


I



$I \cdot E$

Remarquez l'effet de jonction ici



Propriétés de l'ouverture et de la fermeture

Extensivité

Quel que soit l'élément structurant, l'ouverture est anti-extensive et la fermeture est extensive.

Pour tout $I \subseteq \mathbb{Z}^n$ et pour tout $E \subseteq \mathbb{Z}^n$,

$$(I \circ E) \leq I \leq (I \bullet E)$$

Extensivité

L'érosion et la dilatation possèdent ces propriétés seulement si l'élément structurant contient l'origine. Pourquoi pas la fermeture et l'ouverture ?

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

I

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

$(I \ominus E) \not\leq I$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

$((I \ominus E) \oplus E) \leq I$

1	0	1
0	0	1
0	0	0

E

Si l'érosion fait « sortir » le résultat de I , la dilatation qui suit fera « rentrer » le résultat final dans I .

Croissance

L'ouverture et la fermeture sont toutes deux des **opérateurs croissants du point de vue de l'image** :

Si $A_1 \leq A_2$, alors

$$(A_1 \circ E) \leq (A_2 \circ E)$$

$$(A_1 \bullet E) \leq (A_2 \bullet E)$$

Du point de vue de l'élément structurant, l'ouverture est décroissante tandis que la fermeture est croissante :

Si $E_1 \subseteq E_2$, alors

$$(A \circ E_2) \leq (A \circ E_1)$$

$$(A \bullet E_1) \leq (A \bullet E_2)$$

Idempotence

La dernière propriété de l'ouverture et de la fermeture est **l'idempotence** :

Pour tout $I \subseteq \mathbb{Z}^n$ et pour tout $E \subseteq \mathbb{Z}^n$,

$$I \circ E = (I \circ E) \circ E$$

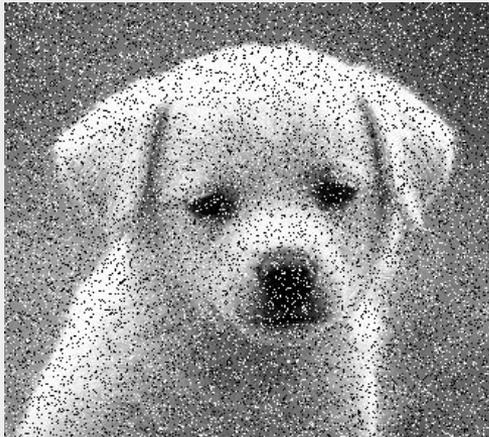
$$I \bullet E = (I \bullet E) \bullet E$$

Il **est inutile** de répéter plusieurs fois une même ouverture ou une même fermeture d'affilée sur la même image !

Applications : supprimer du bruit, top-hat

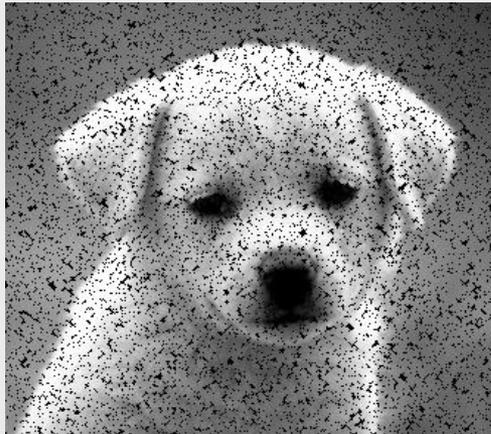
Suppression de bruit poivre et sel

Problème : supprimer le bruit sur l'image.



I

Cette technique fonctionne généralement bien pour le bruit « poivre & sel »



$I \circ \Gamma_4$



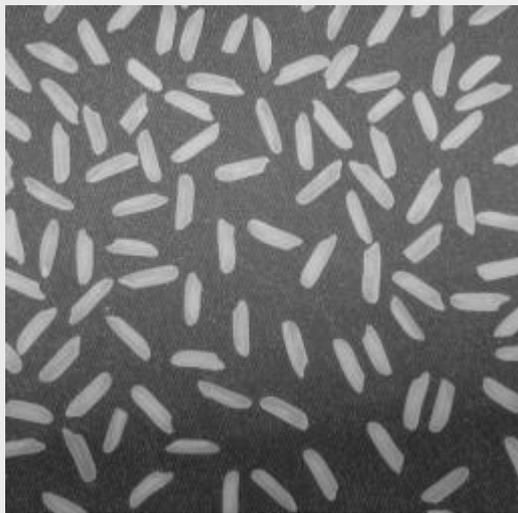
$(I \circ \Gamma_4) \bullet 2\Gamma_8$

Remarquez que l'ouverture et la fermeture ont été réalisées avec des éléments structurants différents...

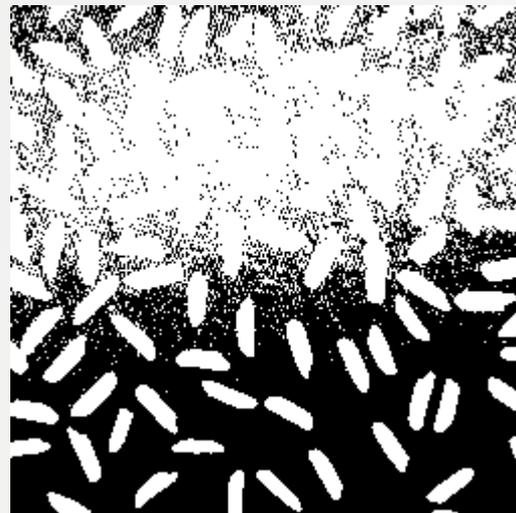
Nous verrons pourquoi dans quelques slides...

Le top-hat

Problème : extraire les grains de riz de l'image



I



Seuil à 100

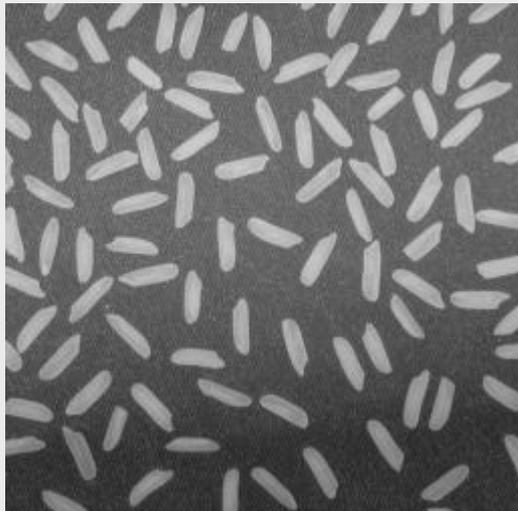


Seuil à 130

Le seuil à 100 permet de correctement extraire les grains du bas, et le seuil à 130 permet d'extraire les grains du haut. **Le gradient d'éclairage vertical ne nous permet pas de trouver un seuil satisfaisant !**

Le top-hat

Solution : utiliser une ouverture pour extraire le fond de l'image



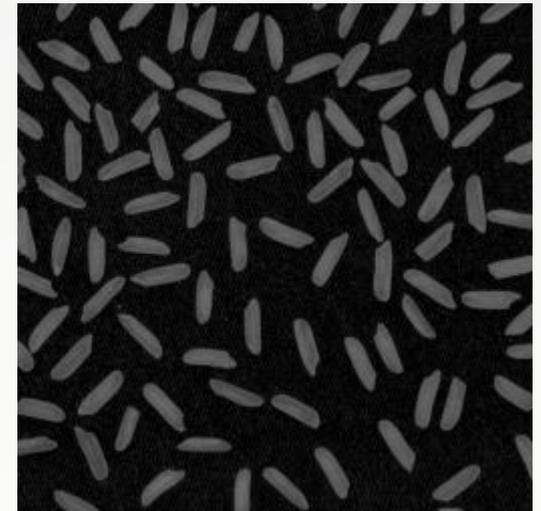
I



E



$I \circ E$



$I - (I \circ E)$

L'opération **Top-Hat**, qui est un résidu d'ouverture, permet d'extraire le fond d'une image afin de **soustraire les effets d'un gradient d'éclairage**.

Petit intermède : Compter les morceaux d'un objet

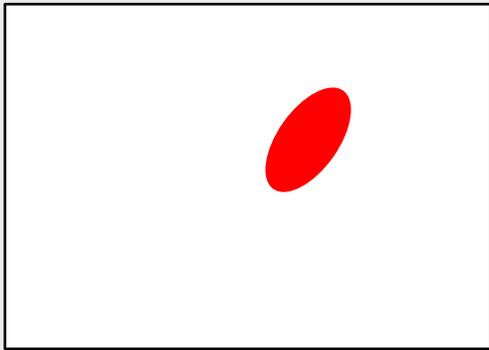
Compter les morceaux

Pour supprimer le bruit poivre et sel de l'image du chien, nous n'avons pas utilisé le même élément structurant pour l'ouverture et la fermeture...

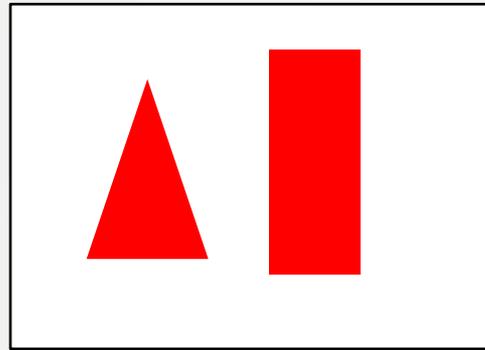
Pourquoi ?

Compter les morceaux

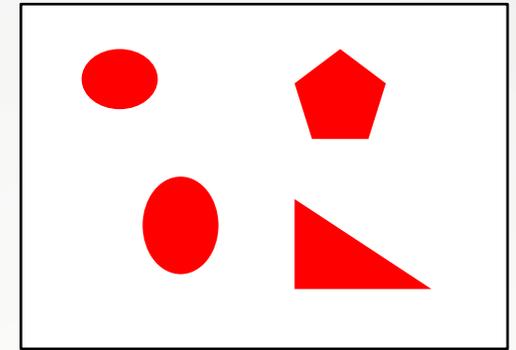
Une **composante connexe** est un morceau de l'objet.



A



B



C

Sur l'image A, l'objet (en rouge) semble posséder un seul morceau, deux morceaux sur l'image B, et quatre morceaux sur l'image C.

Compter les morceaux

Question : de combien de morceaux (ou composantes connexes) l'ensemble des pixels à 1 dans l'image ci-dessous est-il composé ?

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

1 ou 2 composantes ? Tout dépend si l'on considère que deux pixels joints par leurs sommets font partie du même « morceau ».

Choisir un élément structurant

Pour compter le nombre de morceaux d'un objet, **il nous faut un élément structurant.**

Cet élément structurant définira quels sont les pixels qui sont considérés comme voisins (et appartenant à un même morceau) dans l'objet : il définit la **connexité.**

Si on choisit Γ_4 comme élément structurant, alors deux pixels se touchant par leur sommet ne seront pas considérés comme voisins.

Si on choisit Γ_8 comme élément structurant, alors deux pixels se touchant par leur sommet seront considérés comme voisins.

Définition

Soit $E \subset \mathbb{Z}^n$ (E est un élément structurant de \mathbb{Z}^n) tel que $E = \check{E}$, et soit $x, y \in \mathbb{Z}^n$.

Les points x et y sont **considérés comme E-voisins** si $y \in E_x$ (ce qui équivaut à $x \in E_y$).

Il existe certains voisinages remarquables :

- . Les voisinage induit par Γ_4 et Γ_8 , appelés **4-voisinage** et **8-voisinage**,
- . Les voisinage induit par Γ_6 et Γ_{26} , appelés **6-voisinage** et **26-voisinage**,

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}^n$ (un ensemble de points de \mathbb{Z}^n), $J \subseteq I$ et $E \subset \mathbb{Z}^n$ (E est un élément structurant de \mathbb{Z}^n)

L'ensemble J est une **composante E-connexe** de I ssi

. Pour tout $x, y \in J$, il existe une séquence de points z_0, z_1, \dots, z_k de J tels que

. $z_0 = x$,

. $z_k = y$,

. Pour tout $a \in [1; k]$, z_{a-1} et z_a sont E -voisins.

. Il n'existe aucun $H \subseteq I$ respectant la première propriété et tel que $J \subset H$ (maximalité de J).

Compter les morceaux

En général, en 2d, on utilise Γ_4 ou Γ_8 comme connexité (on parle aussi de 4-connexité et de 8-connexité) pour détecter les composantes connexes d'un objet.

En 3d, on utilise en général Γ_6 ou Γ_{26} comme connexité (on parle aussi de 6-connexité et de 26-connexité) pour détecter les composantes connexes d'un objet (la 18-connexité est moins souvent utilisée).

Compter les morceaux

Question : Considérons l'ensemble des pixels à 1 dans l'image ci-dessous. Combien de composantes connexes possède-t-il ?

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Si on le mesure avec Γ_8 , il possède **1 seule composante 8-connexe**,

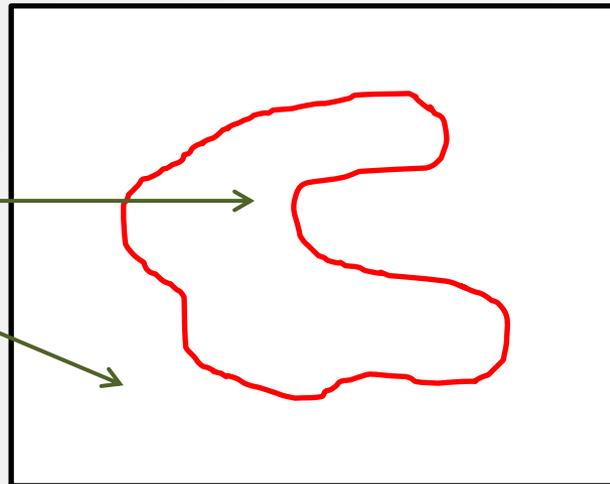
Si on le mesure avec Γ_4 , il possède **2 composantes 4-connexes**.

Le théorème de Jordan

Le théorème de Jordan peut s'énoncer aisément ainsi :

« *Toute courbe simple (qui ne se recoupe pas) fermée sépare le plan en deux parties* »

La courbe rouge sépare bien le plan (en blanc) en deux parties



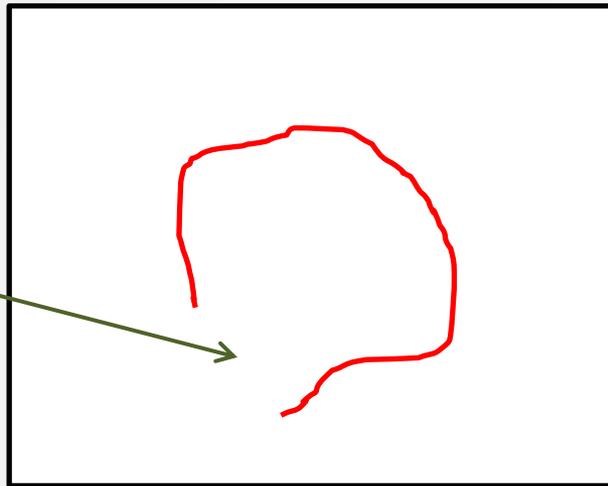
Le théorème de Jordan doit rester vrai dans le domaine discret (les images).

Le théorème de Jordan

Le théorème de Jordan dit aussi:

« Une courbe simple ouverte ne sépare pas le plan en deux parties »

La courbe rouge ne sépare pas le plan en deux morceaux



Le théorème de Jordan doit rester vrai dans le domaine discret (les images).

Application de Jordan sur les images

Dans cet exemple, la courbe simple est l'ensemble des pixels blancs, et le plan est l'ensemble des pixels noirs.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

De combien de 4-morceaux est constituée la courbe ?

Un seul 4-morceau. Elle devrait donc séparer le plan en deux parties.

De combien de morceaux est constitué le plan ?

Deux 4-morceaux, ou deux 8-morceaux. Jordan semble fonctionner...

Application de Jordan sur les images

Dans cet exemple, la courbe simple est l'ensemble des pixels blancs, et le plan est l'ensemble des pixels noirs.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

De combien de 4-morceaux est constituée la courbe ?

Un seul 4-morceau, **mais elle est ouverte** ! Elle ne devrait pas séparer le plan en deux parties...

De combien de morceaux est constitué le plan ?

Deux 4-morceaux, ou un 8-morceau. Jordan semble fonctionner avec la 8-connexité...

Application de Jordan sur les images

Dans cet exemple, la courbe simple est l'ensemble des pixels blancs, et le plan est l'ensemble des pixels noirs.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

De combien de 8-morceaux est constituée la courbe ?

Un seul 8-morceau, et elle est fermée. Elle devrait donc séparer le plan en deux parties...

De combien de morceaux est constitué le plan ?

Deux 4-morceaux, ou un 8-morceau. Jordan semble fonctionner avec la 4-connexité...

Conclusion sur Jordan et les images

Si on récapitule ce qui a été dit dans les deux slides précédents :

Quand la courbe est vue avec la 4-connexité, il faut considérer le plan avec la 8-connexité pour que Jordan soit vérifié.

Quand la courbe est vue avec la 8-connexité, il faut considérer le plan avec la 4-connexité pour que Jordan soit vérifié.

Conclusion sur Jordan et les images

En conclusion,

En 2d, si on considère les pixels clairs (les montagnes) avec la 8-connexité, il faudra considérer les pixels foncés avec la 4-connexité et **vice-versa**.

En 3d, si on considère les pixels clairs (les montagnes) avec la 26-connexité, il faudra considérer les pixels foncés avec la 6-connexité et **vice-versa**.

Reconstruction inférieure & Ouverture par reconstruction

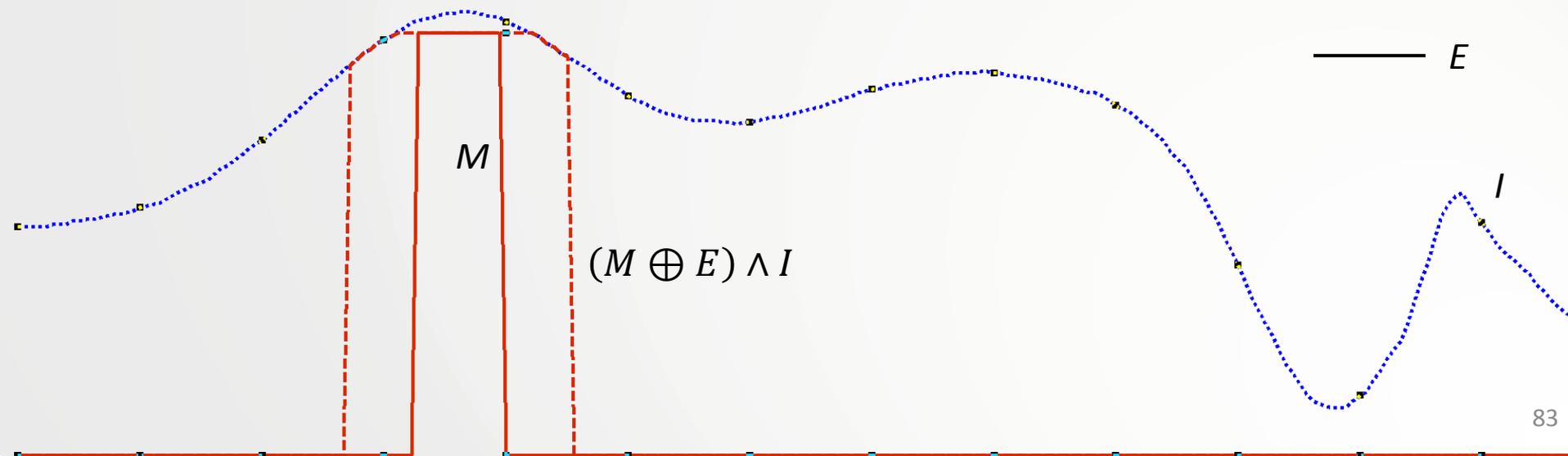
13

Définition

Nous définissons la **dilatation conditionnelle** :

Soient $I, M: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soit $E \subset \mathbb{Z}^n$, la **dilatation conditionnelle** de M par E restreinte à I est

$$M \oplus_I E = (M \oplus E) \wedge I$$



Itération de la dilatation conditionnelle

On peut itérer la dilatation conditionnelle :

Soient $I, M: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soit $E \subset \mathbb{Z}^n$, on notera

$$(M \oplus_I E)^n = (((M \oplus_I E) \oplus_I E) \dots \oplus_I E) \quad (n \text{ fois})$$

Ce qui nous amène à la **reconstruction inférieure** :

La **reconstruction inférieure** de M par E restreinte à I est

$$I \Delta_E M = (M \oplus_I E)^\infty$$

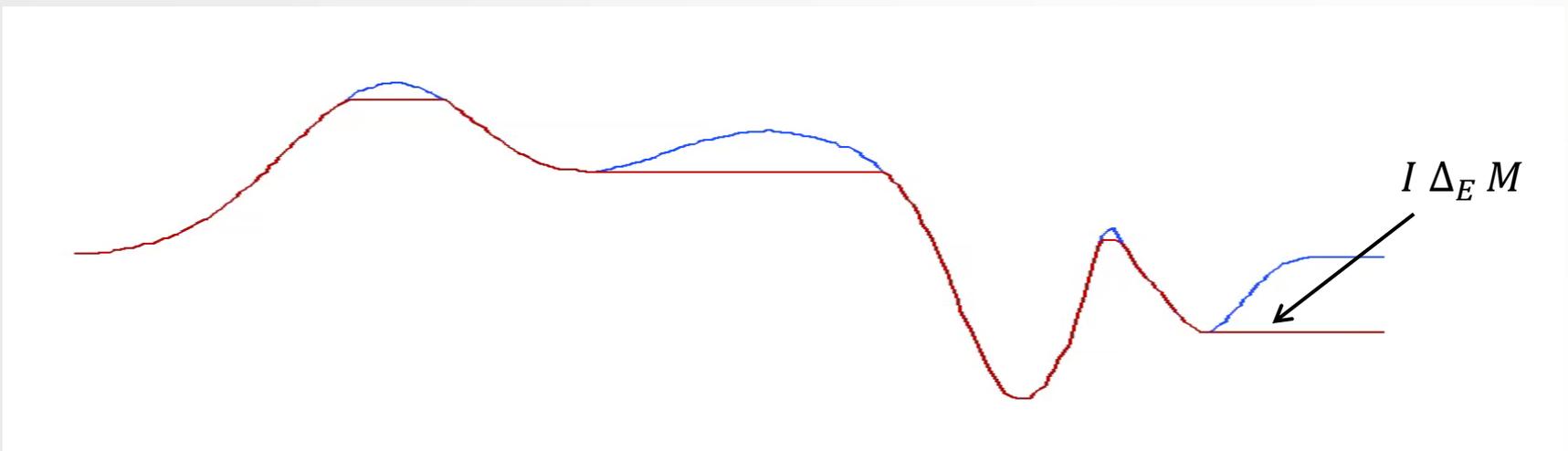
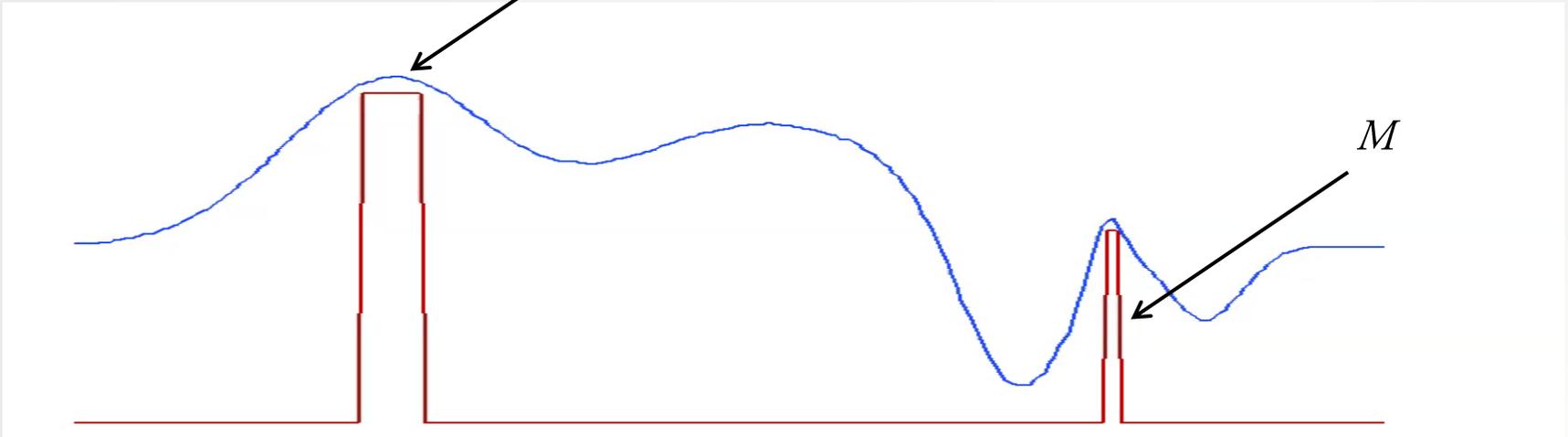
(répétition de la dilatation conditionnelle jusqu'à stabilité).

Exemple 1d

Reconstruction inférieure

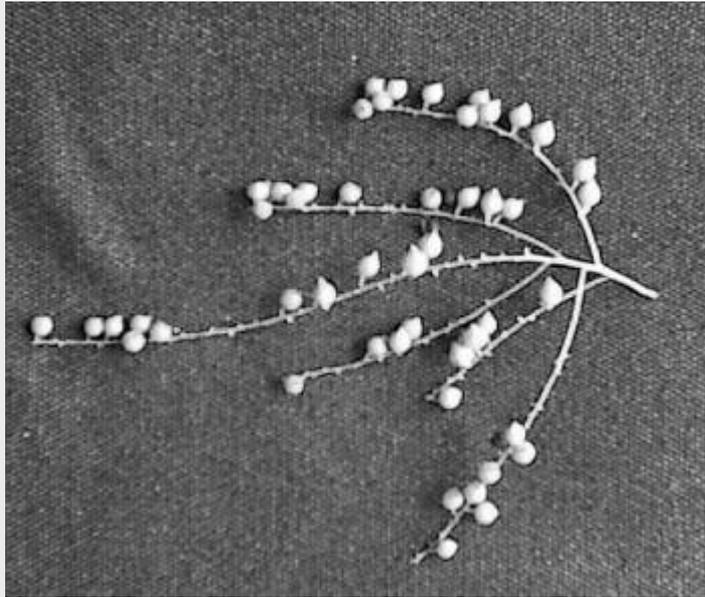
I

$- E$

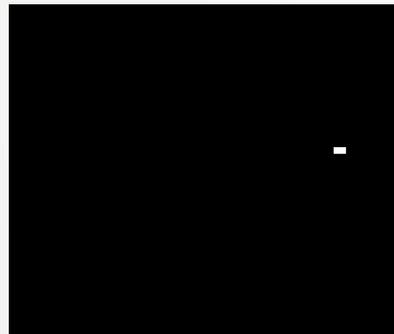


Exemple 2d

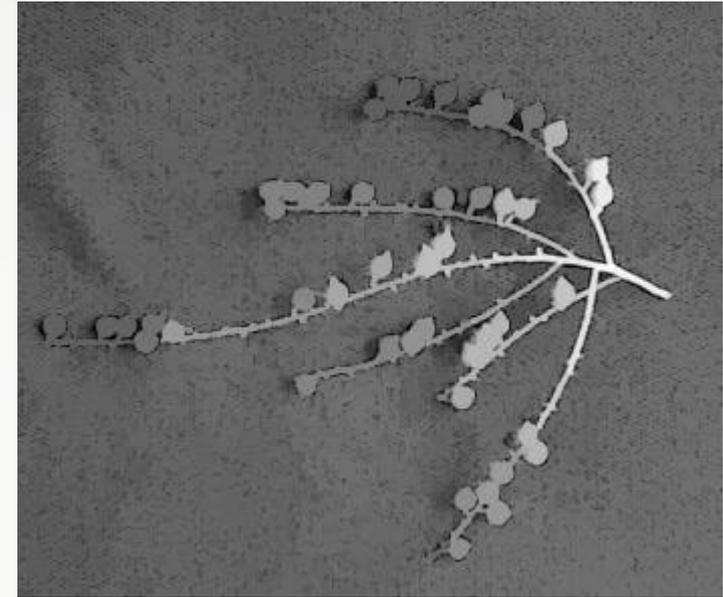
Reconstruction inférieure



I



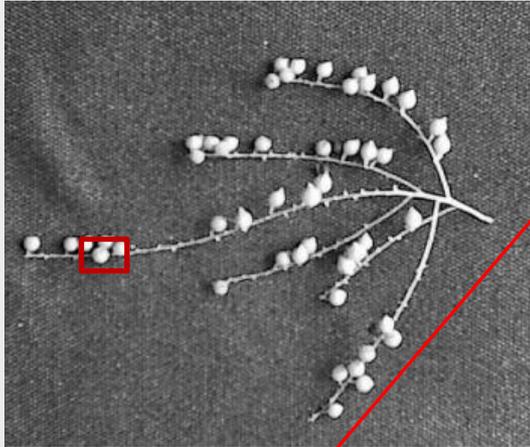
M



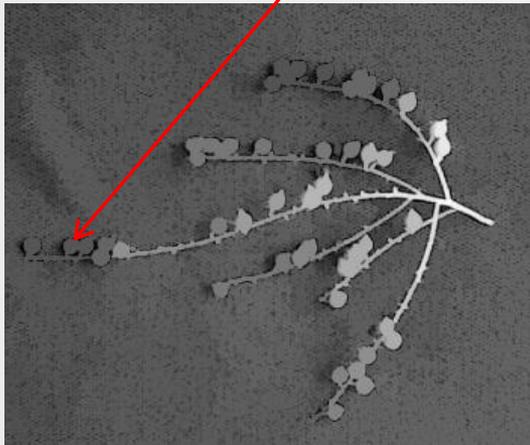
$I \Delta_{\Gamma_4} M$

Explication de certaines valeurs obtenues

Reconstruction inférieure



I



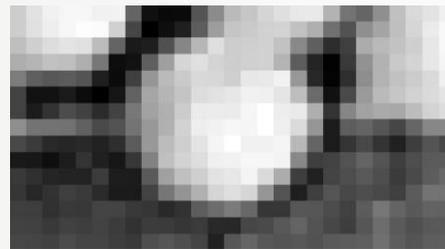
$I \Delta_{\Gamma_4} M$

La valeur de ce pixel P est **85**.

Imaginons que I soit un relief montagneux où l'on se promène.

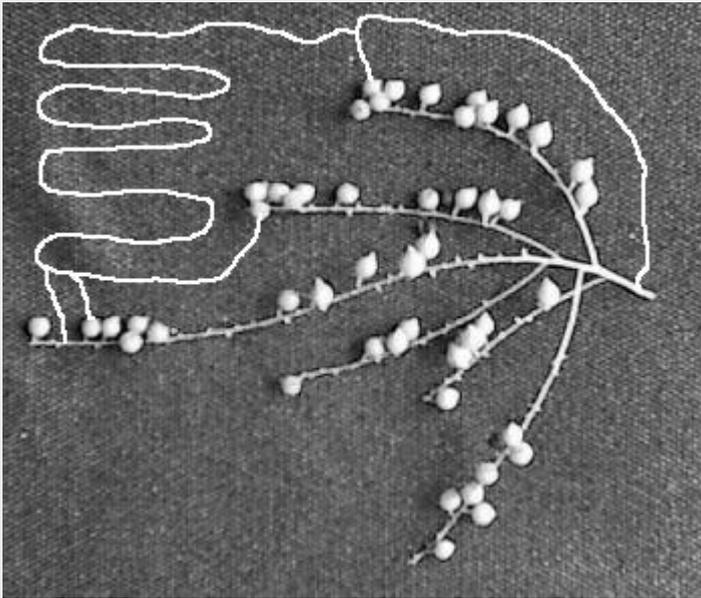
On part des points de M , et on va vers P en descendant le moins possible d'altitude.

Dans le meilleur des cas, on devra nécessairement descendre à l'altitude **85** pour rejoindre P .

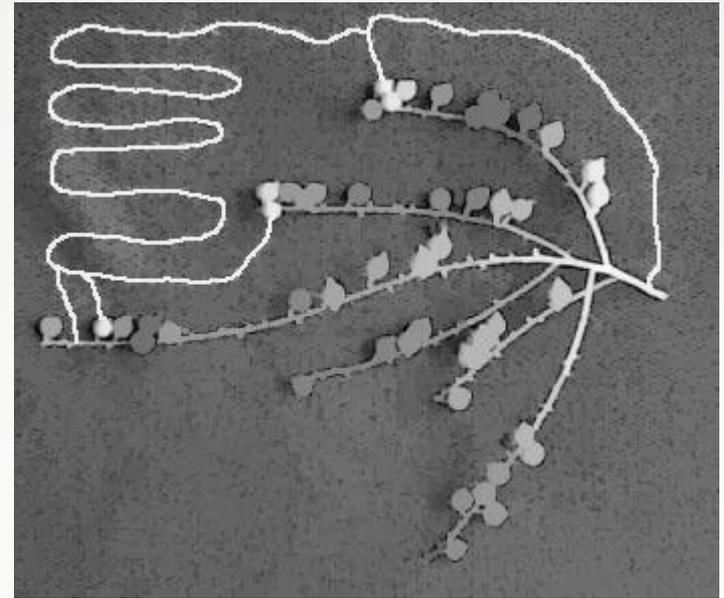


Exemple 2d (suite)

Que se passe-t-il si on ajoute un chemin « haut » entre M et P ?



I

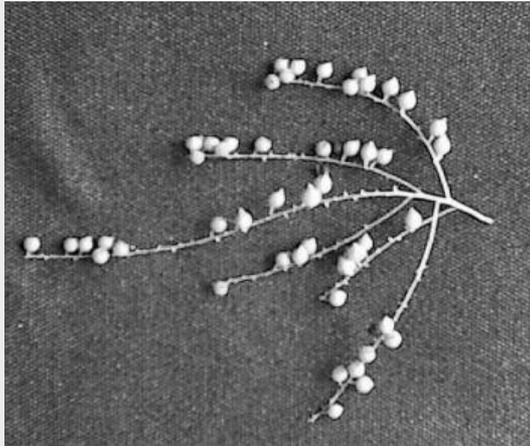


$I \Delta_{\Gamma_4} M$

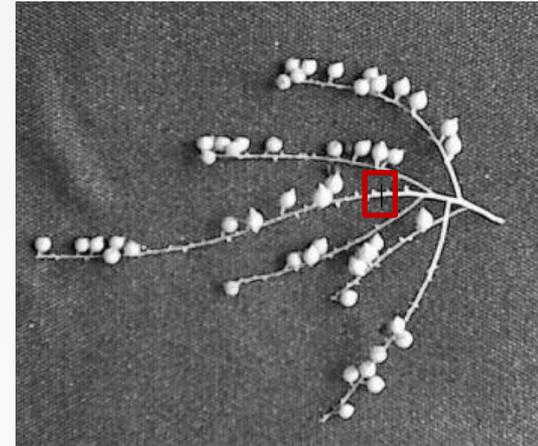
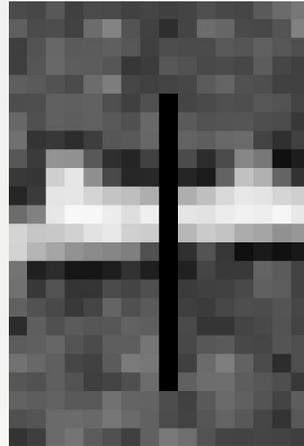
Le chemin haut permet à l'algorithme de faire un détour pour atteindre certains pixels de l'image : la reconstruction possède des zones plus claires.

Exemple 2d (suite de la suite)

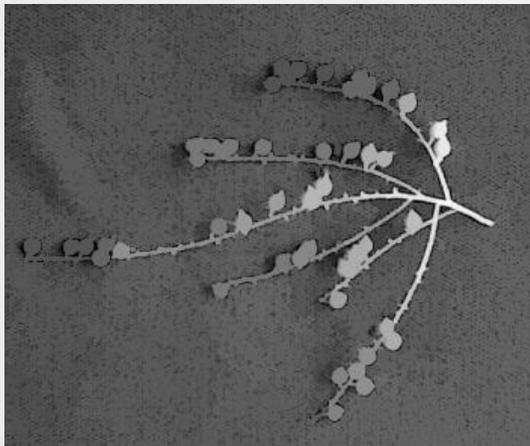
Que se passe-t-il si on « creuse » le relief à certains endroits ?



I

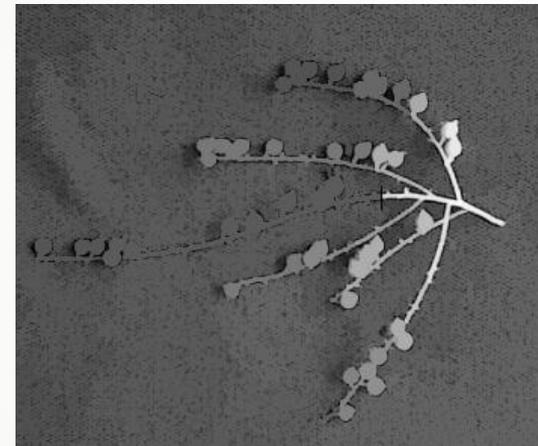


I'



$I \Delta_{\Gamma_4} M$

En creusant le relief, on force l'algorithme à devoir descendre plus bas pour accéder à certains pixels : la reconstruction possède des zones plus foncées.



$I' \Delta_{\Gamma_4} M$

Définition

L'ouverture par reconstruction consiste à réaliser une ouverture, puis une reconstruction de l'image de départ à partir de son ouvert :

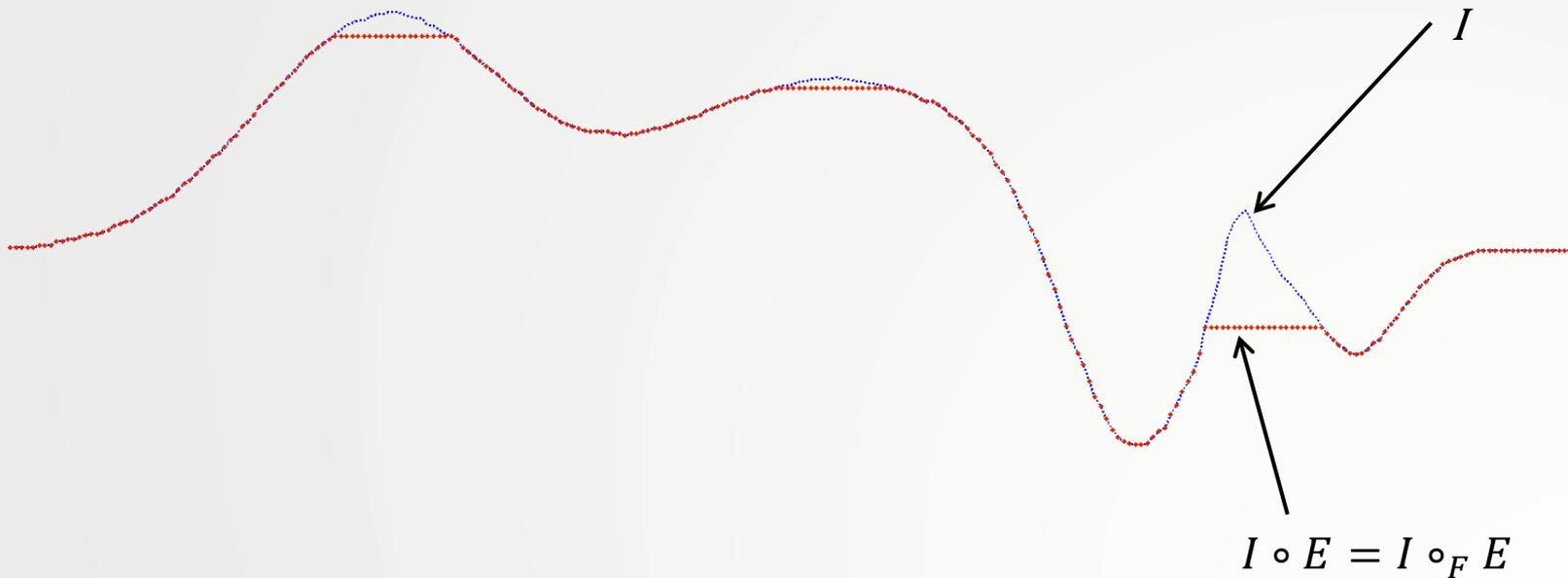
Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soient $E, F \subset \mathbb{Z}^n$, **l'ouverture par reconstruction** (sous F) de I par E est

$$I \circ_F E = I \Delta_F (I \circ E)$$

Généralement, F (utilisé pour la reconstruction) sera un élément structurant de voisinage ($\Gamma_4, \Gamma_8, \dots$).

Exemple 1d

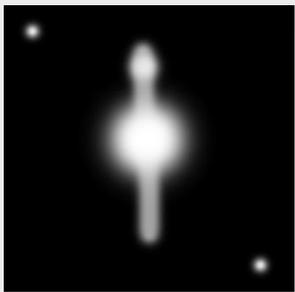
L'ouverture par reconstruction - F — E



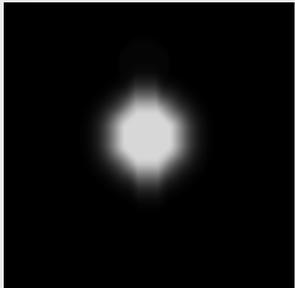
En 1d, la reconstruction après l'ouverture ne sert à rien...

Exemple 2d

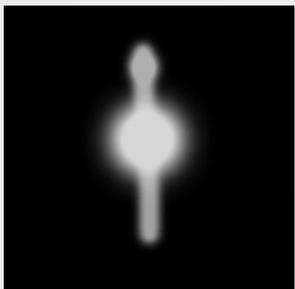
L'ouverture par reconstruction



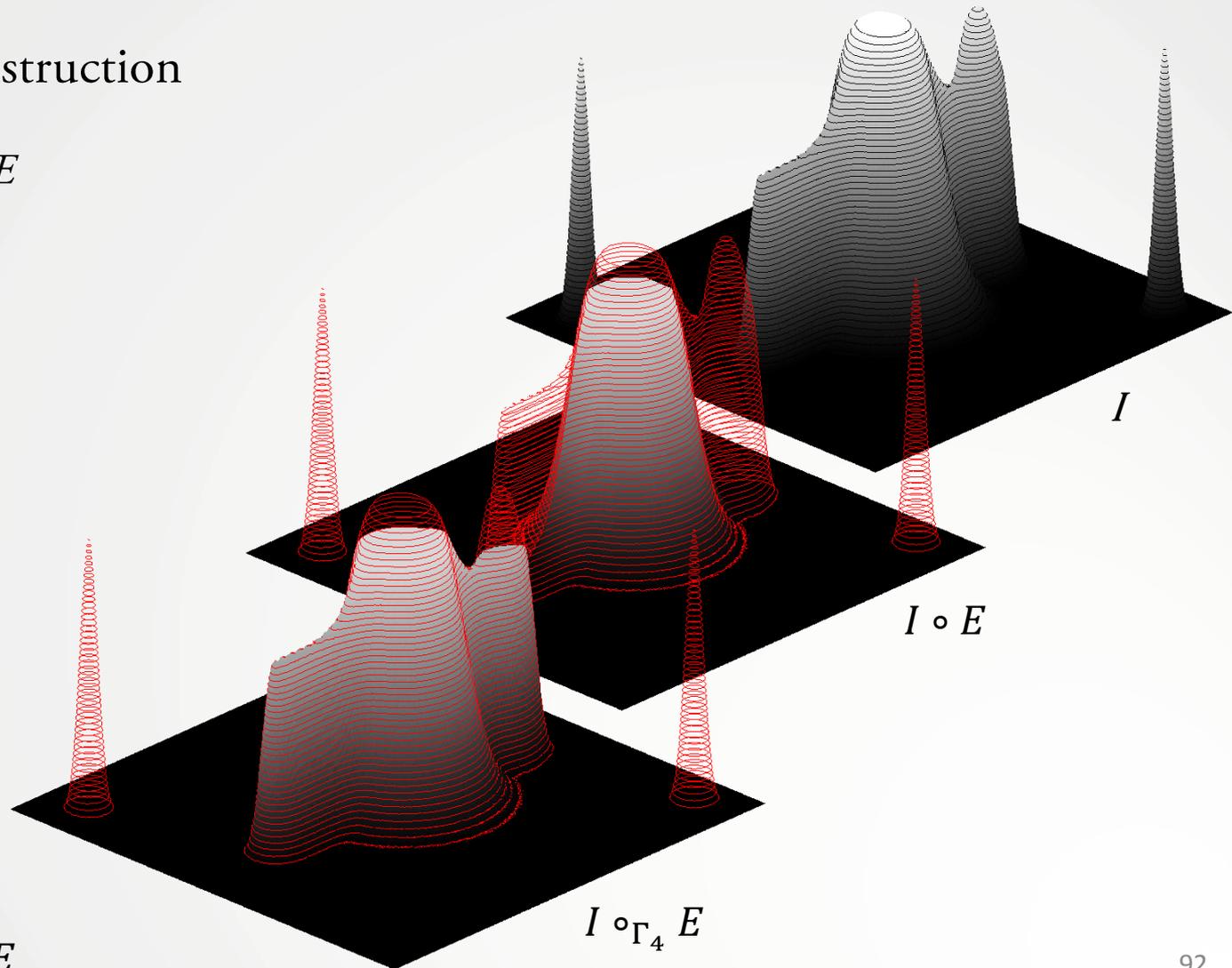
I



$I \circ E$



$I \circ_{\Gamma_4} E$

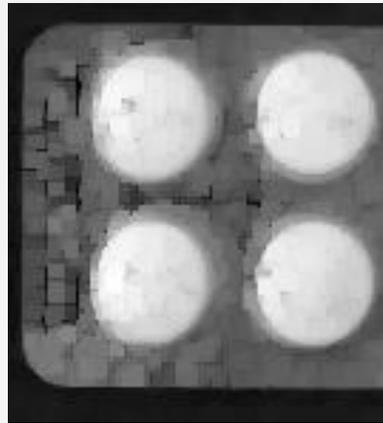


Exemple 2d (suite)

Exemple 2d : du bruit « sel » sur une image...



I_m



$I_m \circ 2\Gamma_8$



$I_m \circ_{\Gamma_4} 2\Gamma_8$

Reconstruction supérieure & Fermeture par reconstruction

13

Définition

Nous procédons comme dans la section précédente :

Soient $I, M: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soit $E \subset \mathbb{Z}^n$,

l'érosion conditionnelle de M par E restreinte à I est

$$M \ominus_I E = (M \ominus E) \vee I$$

Itération de l'érosion conditionnelle

On peut itérer l'érosion conditionnelle :

Soient $I, M: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soit $E \subset \mathbb{Z}^n$, on notera

$$(M \ominus_I E)^n = (((M \ominus_I E) \ominus_I E) \dots \ominus_I E) \quad (n \text{ fois})$$

Ce qui nous amène à la **reconstruction supérieure** :

La **reconstruction supérieure** de M par E restreinte à I est

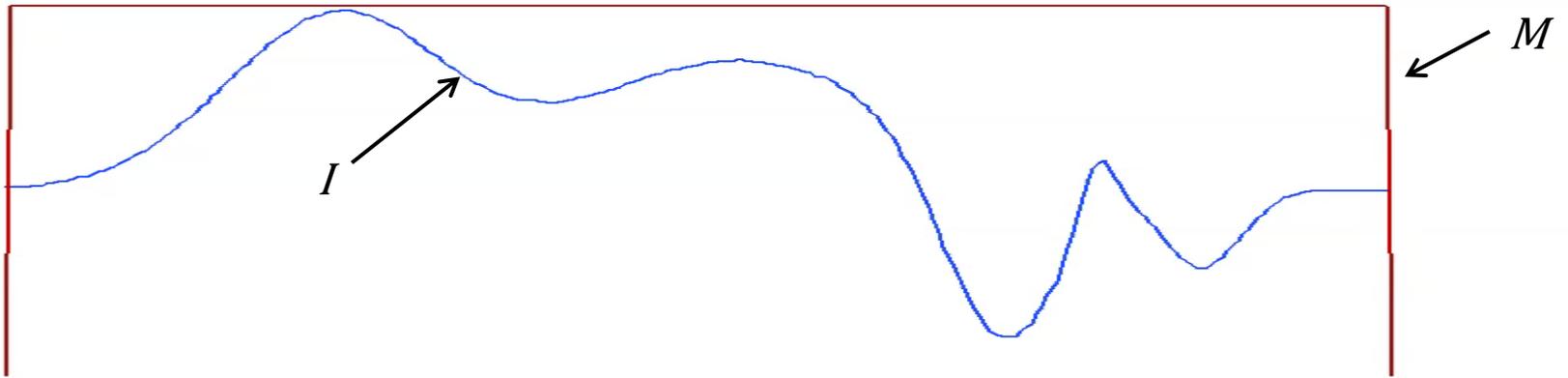
$$I \nabla_E M = (M \ominus_I E)^\infty$$

(répétition de l'érosion conditionnelle jusqu'à stabilité).

Exemple 1d

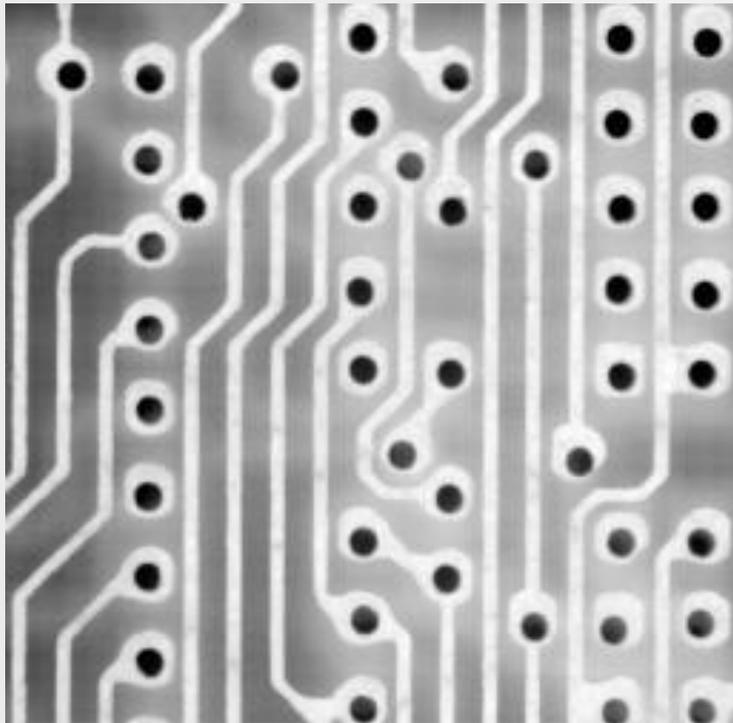
- E

Reconstruction supérieure

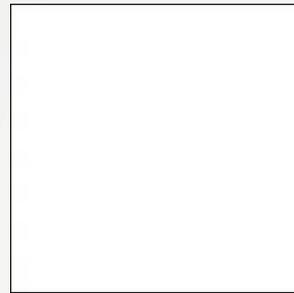


Exemple 2d

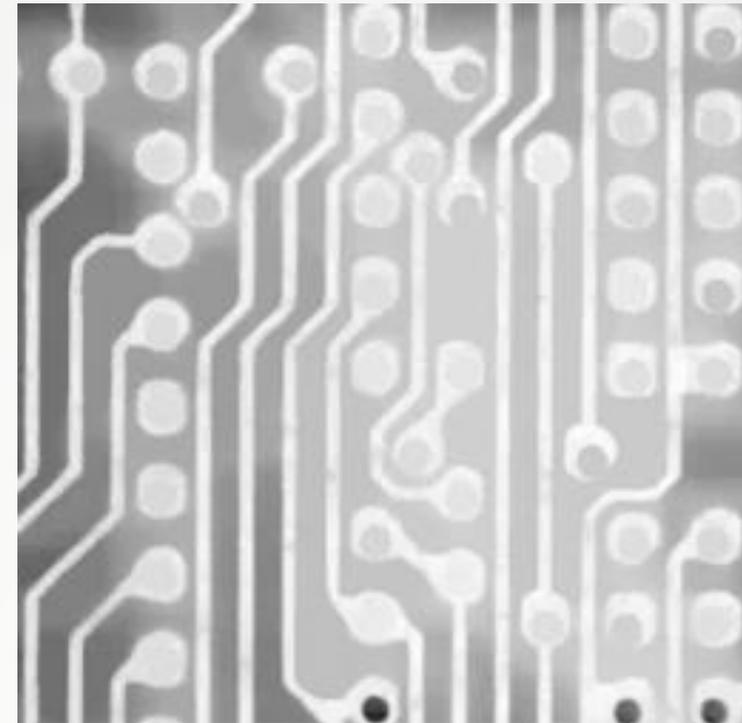
Reconstruction supérieure



I



M
(le cadre de l'image
est noir, le reste est
blanc)

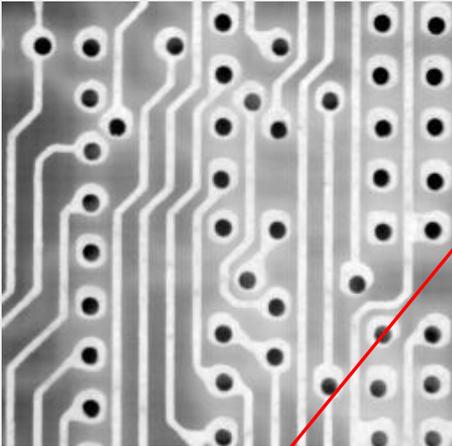


$I \nabla_{\Gamma_4} M$

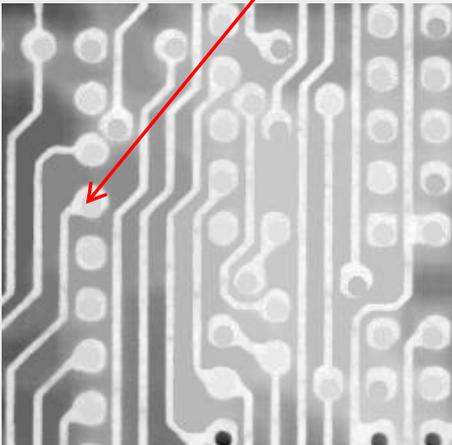
Cette technique permet de boucher les trous de l'image

Explication de certaines valeurs obtenues

Reconstruction supérieure



I



$I \nabla_{\Gamma_4} M$

La valeur de ce pixel P est **217**.

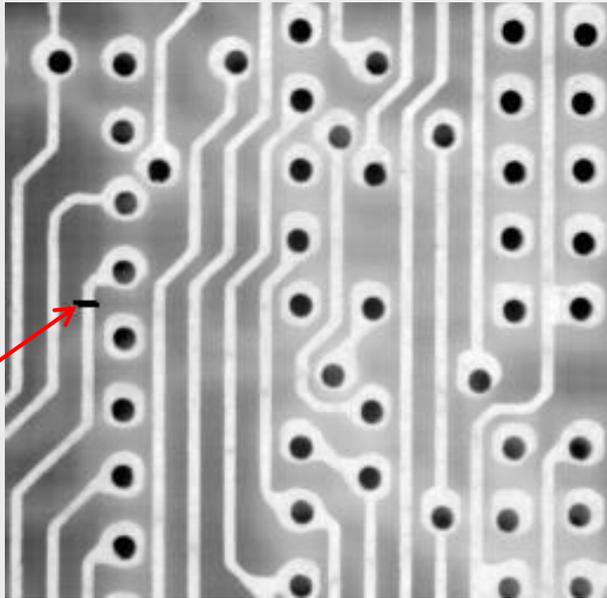
Imaginons que I soit un relief montagneux où l'on se promène.

On part de M (ici, ce sont les points à 0 de M qui nous intéressent, donc **les points du bord de l'image**), et l'on souhaite se rendre vers P en montant le moins possible en altitude.

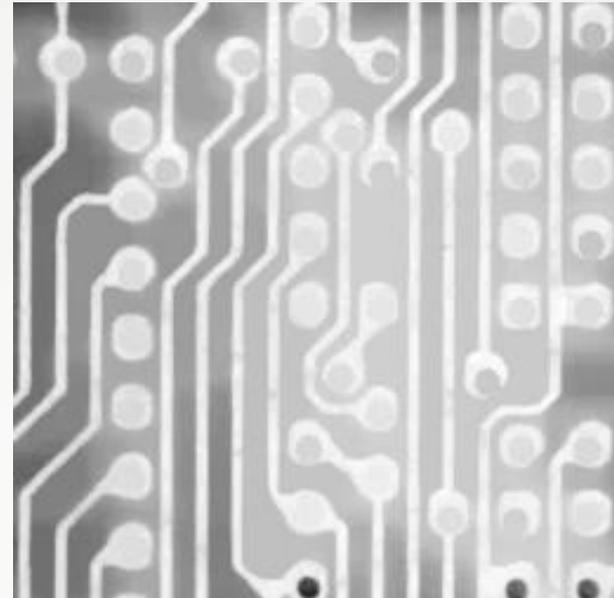
Dans le meilleur des cas, il faudra nécessairement monter au moins à l'altitude **217** pour rejoindre P .

Exemple 2d (suite)

Que se passe-t-il si on creuse un peu entre M et P ?



I

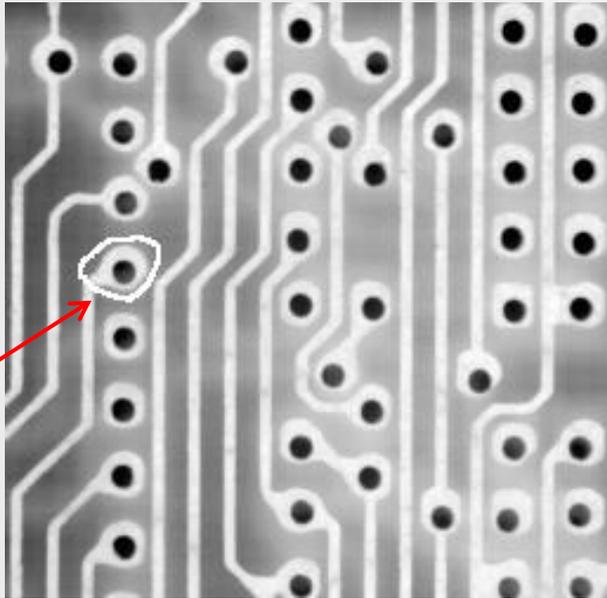


$I \Delta_{\Gamma_4} M$

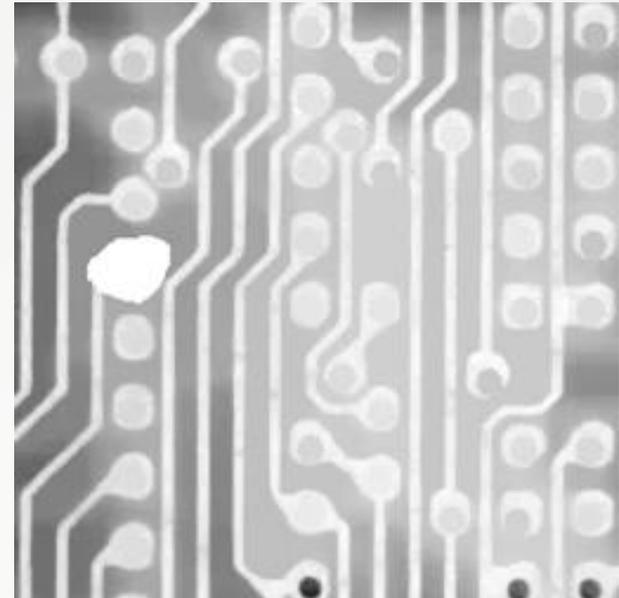
Ca ne change pas beaucoup le résultat, car il faudra toujours monter aussi haut pour atteindre le pixel P .

Exemple 2d (suite de la suite)

Que se passe-t-il si on construit une chaîne de montagnes autour de P ?



I

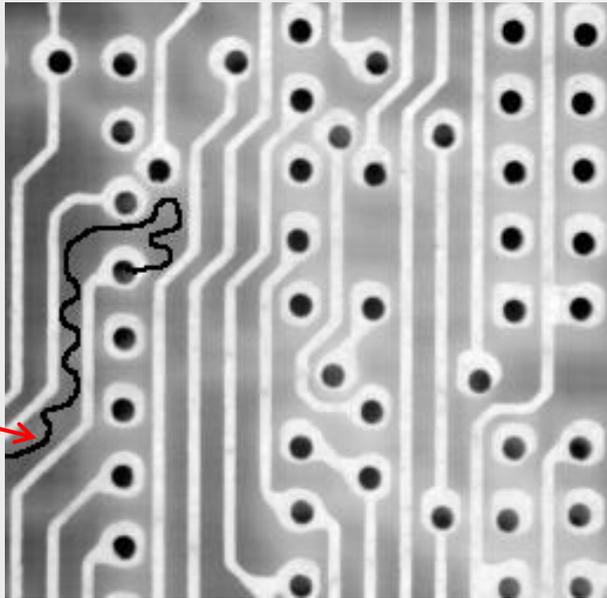


$I \Delta_{\Gamma_4} M$

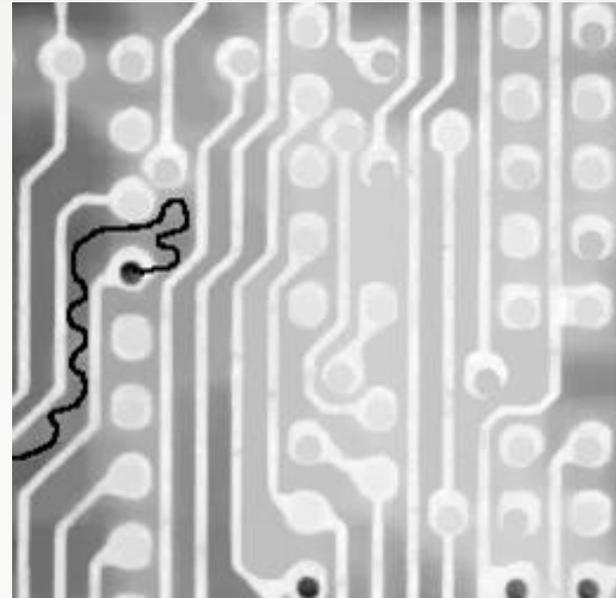
Pour aller de M à P , il faudra monter plus haut : toute la zone entourée par les montagnes devient blanche.

Exemple 2d (suite de la suite de la revanche)

Que se passe-t-il si on construit une tranchée pour aller à P ?



I



$I \Delta_{\Gamma_4} M$

Pour aller de M à P , on peut trouver un chemin (plus long) qui reste bas : on peut atteindre P en montant moins en altitude. La valeur de P dans l'image reconstruite est plus basse.

Définition

La fermeture par reconstruction consiste à réaliser une fermeture, puis une reconstruction de l'image de départ à partir de son fermé :

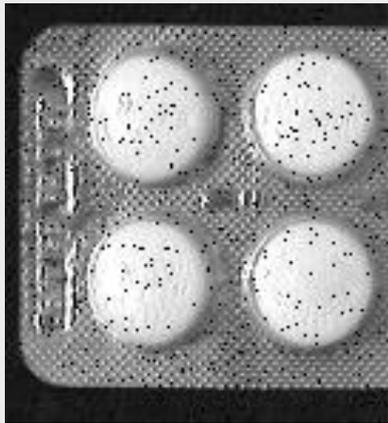
Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, et soient $E, F \subset \mathbb{Z}^n$, **la fermeture par reconstruction** (sous F) de I par E est

$$I \bullet_F E = I \nabla_F (I \bullet E)$$

Généralement, F (utilisé pour la reconstruction) sera un élément structurant de voisinage ($\Gamma_4, \Gamma_8, \dots$).

Exemple 2d

La fermeture par reconstruction



I_m



$I_m \bullet 2\Gamma_8$



$I_m \bullet_{\Gamma_4} 2\Gamma_8$

Propriétés des filtres par reconstruction

Partition

On rappelle la définition d'une **partition** :

Soit un ensemble I , et un ensemble $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ de sous-ensembles de I .

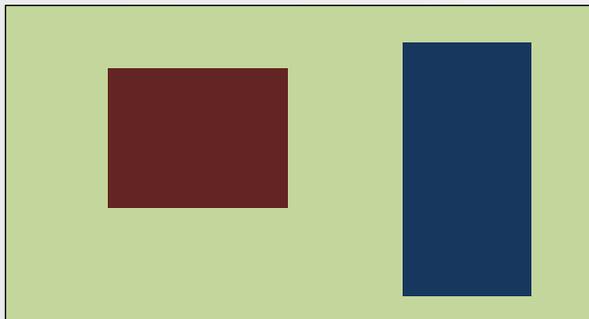
On dit que P est une **partition** de I si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i, j \in [1; k], i \neq j \leftrightarrow P_i \cap P_j = \emptyset \\ \bigcup_{i \in [1; k]} P_i = I \end{array} \right.$$

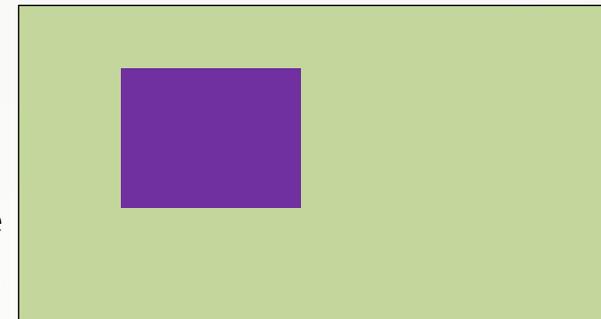
Relation entre partitions

On rappelle aussi une relation d'ordre (partielle) entre les partitions :

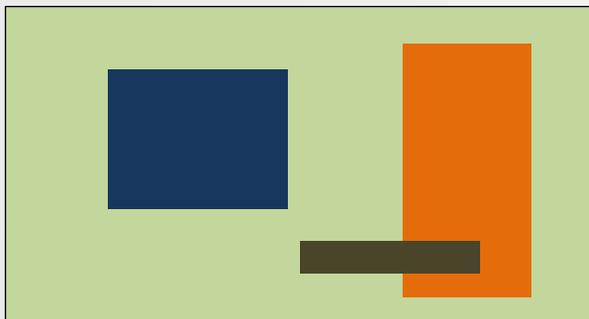
Soit un ensemble I , et deux partitions P_1, P_2 de I . On dit que P_1 **est plus fine** que P_2 si chaque élément de P_2 est inclus dans un élément de P_1 .



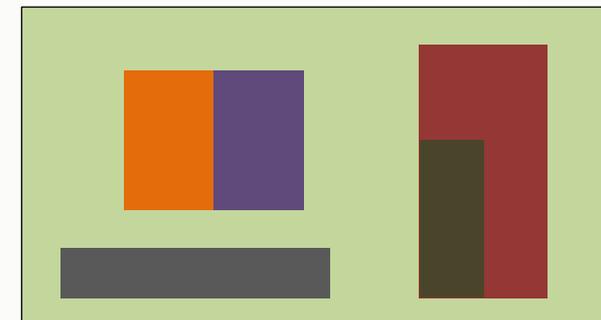
P_1 : Chaque couleur représente un élément de la partition



P_1 est plus fine que P_2



P_1 et P_3 ne sont pas comparables

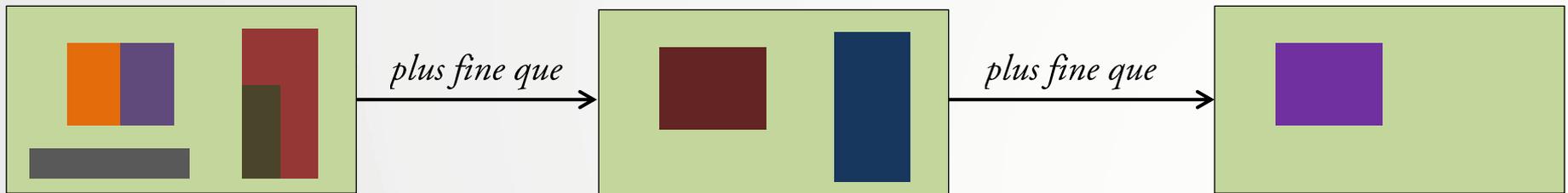


P_4 est plus fine que P_1

Relation entre partitions

Une partition P_2 est plus fine qu'une partition P_1 si P_1 peut être obtenues à partir de P_2 uniquement en fusionnant certaines partitions de cette dernière.

Autrement dit, les « frontières » entre les partitions de P_1 sont incluses dans les « frontières » entre les partitions de P_2 .



Définition d'une zone plate

Dans une image en niveau de gris, une **zone plate** est une composante connexe de pixels ayant le même niveau de gris.

A une image en niveau de gris, on associe comme partitionnement naturel **sa décomposition en zones plates**.

Ex : Décomposition de l'image I en zones plates (en considérant la 8-connexité) (chaque zone plate possède une couleur différente).

2	3	5	2	3
2	3	5	2	3
2	2	2	1	3
2	1	1	1	3
4	1	1	4	4

I

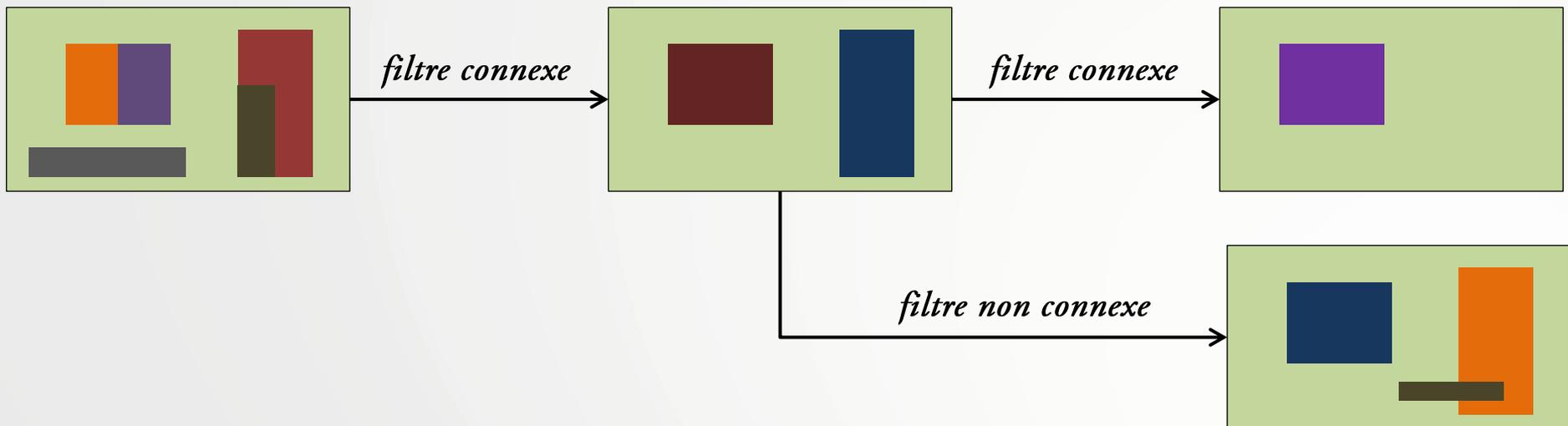
Light Green	Blue	Grey	Light Green	Dark Green
Light Green	Blue	Grey	Light Green	Dark Green
Light Green	Light Green	Light Green	Red	Dark Green
Light Green	Red	Red	Red	Dark Green
Purple	Red	Red	Orange	Orange

Zones plates de I

Filtre connexe

Un filtre morphologique ψ est dit **connexe** si, pour toute image $I \subset \mathbb{Z}^n$, $P(I)$ est plus fine que $P(\psi(I))$.

Un filtre morphologique est connexe s'il ne fait que fusionner des partitions existantes de I , qu'il ne crée pas de « nouvelles frontières ».



Filtre connexe

Tous les filtres par reconstruction sont des **filtres connexes** : ils peuvent être décrits comme un processus de fusion des zones plates.

Les filtres par reconstruction possèdent aussi une propriété de croissance vis-à-vis de l'élément structurant et de la partition : **plus l'élément structurant utilisé est grand, et plus de zones plates de l'image seront fusionnées.**

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, soient $E, F \subset \mathbb{Z}^n$, et soit Ψ un filtre par reconstruction dépendant d'une image et d'un élément structurant.

Si $E \subseteq F$, alors $P(\Psi(I, E))$ **est plus fine que** $P(\Psi(I, F))$.

Exemple

Ouverture par reconstruction : taille de l'élément struct. et zones plates



I



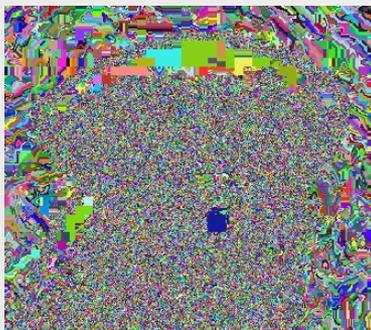
$I \circ_{\Gamma_4} 12\Gamma_8$



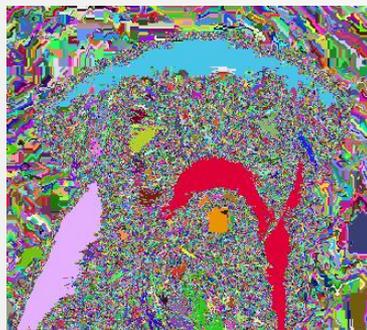
$I \circ_{\Gamma_4} 25\Gamma_8$



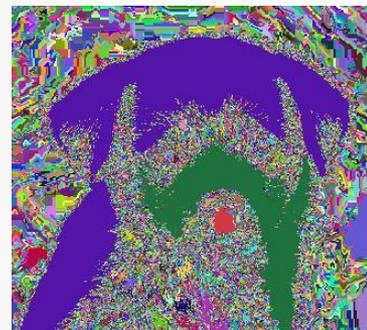
$I \circ_{\Gamma_4} 50\Gamma_8$



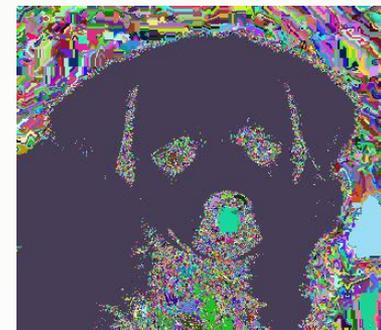
53218 zones plates



39223 zones plates



28008 zones plates



14034 zones plates

Filtres avancés : ASF et H-extrema

ASF

Les **ASF** (Alternate Sequential Filter) en niveaux de gris sont une séquence d'ouvertures et de fermetures de taille croissante.

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subseteq \mathbb{Z}^n$,

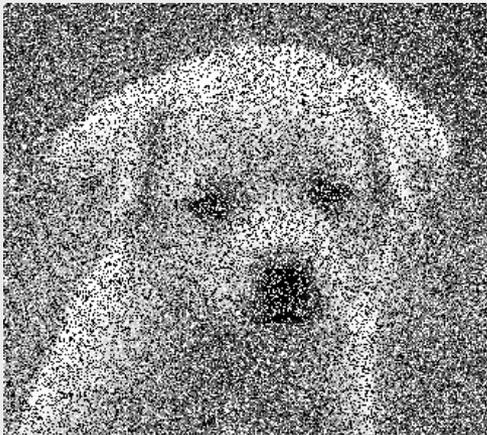
$$ASF_{of,E}^n(I) = ((((((I \circ E) \bullet E) \circ 2E) \bullet 2E) \dots \circ nE) \bullet nE)$$

$$ASF_{fo,E}^n(I) = ((((((I \bullet E) \circ E) \bullet 2E) \circ 2E) \dots \bullet nE) \circ nE)$$

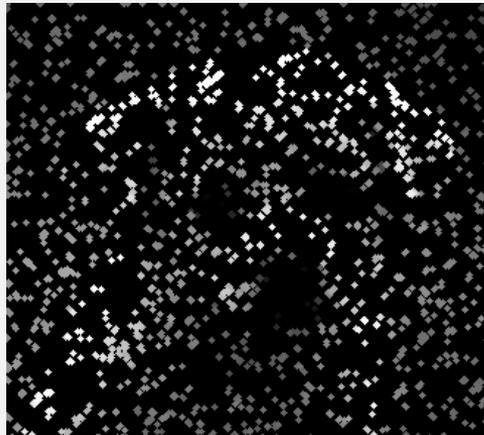
Ces transformations sont généralement utiles dans le cas de présence de bruit additif et soustractif.

ASF pour retirer du bruit

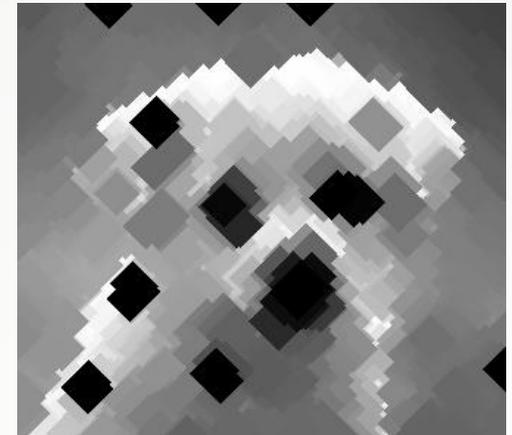
Exemple : retirer du bruit avec seulement une ouverture et une fermeture



Im



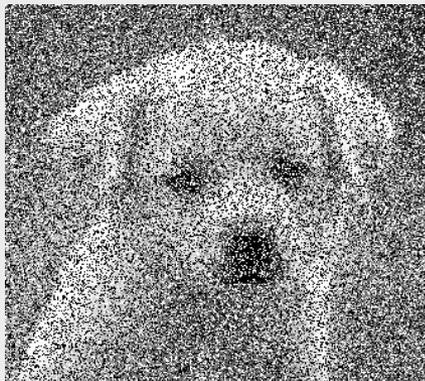
$Im \circ 2\Gamma_4$



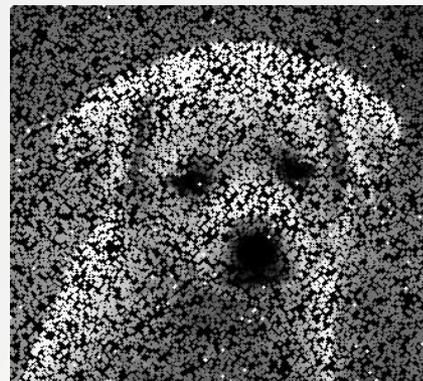
$(Im \circ 2\Gamma_4) \bullet 15\Gamma_4$

ASF pour retirer du bruit

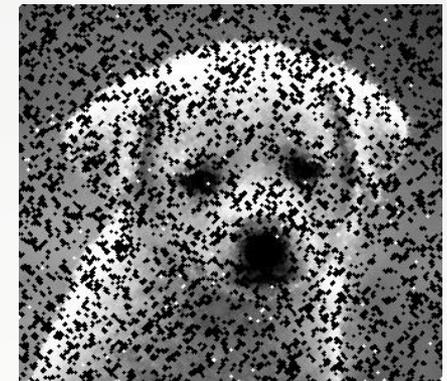
Exemple : retirer du bruit avec une ASF



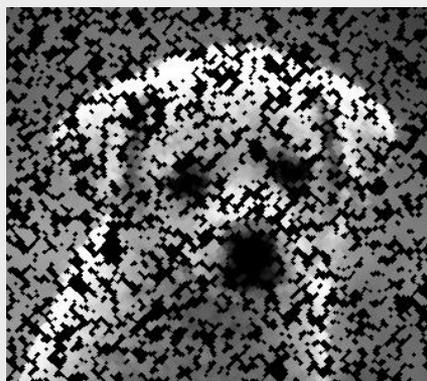
Im



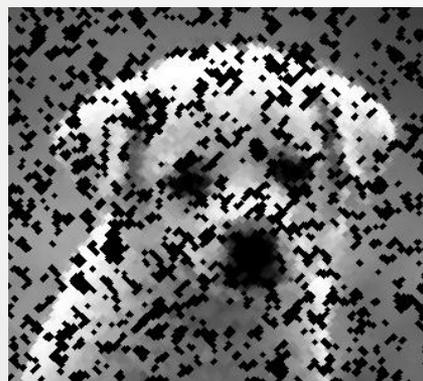
$Im \circ \Gamma_4$



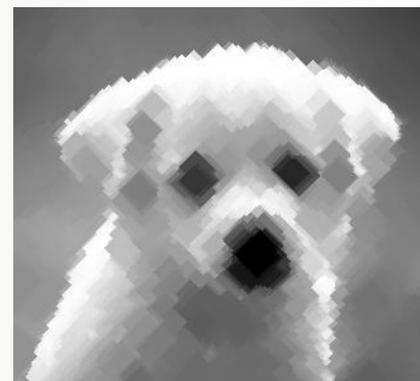
$ASF_{of, \Gamma_4}^1(Im)$



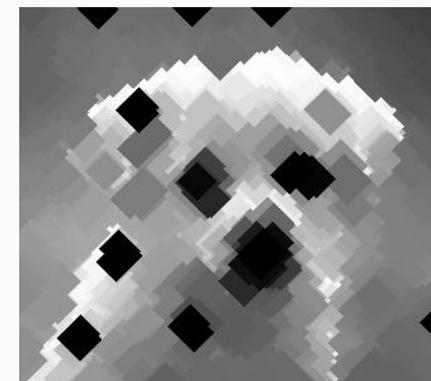
$ASF_{of, \Gamma_4}^1(Im) \circ 2\Gamma_4$



$ASF_{of, \Gamma_4}^2(Im)$



$ASF_{of, \Gamma_4}^2(Im) \bullet 11\Gamma_4$



$(Im \circ 2\Gamma_4) \bullet 15\Gamma_4$

ASF par reconstruction

On peut étendre les ASF en définissant les **ASF par reconstruction**

Soit $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subseteq \mathbb{Z}^n$,

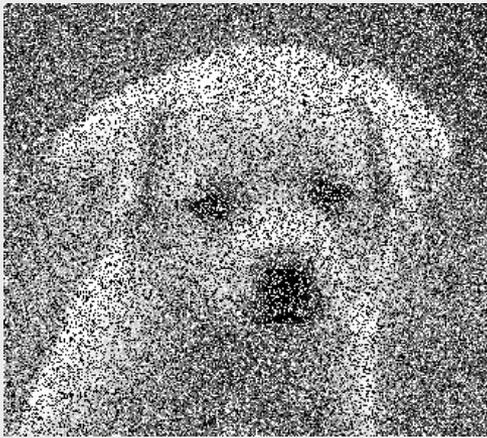
$$ASF_{of,E,F}^n(I) = ((((((I \circ_F E) \bullet_F E) \circ_F 2E) \bullet_F 2E) \dots \circ_F nE) \bullet_F nE)$$

$$ASF_{fo,E,F}^n(I) = ((((((I \bullet_F E) \circ_F E) \bullet_F 2E) \circ_F 2E) \dots \bullet_F nE) \circ_F nE)$$

Comme on utilise une ASF et des reconstructions, l'action de l'ASF par reconstruction fusionne des petites montagnes (ouverture par recons.) et des petites vallées (fermeture par recons.), puis continue en s'attaquant à des structures plus grandes.

ASF par reconstruction

Exemple : retirer du bruit avec une ASF par reconstruction



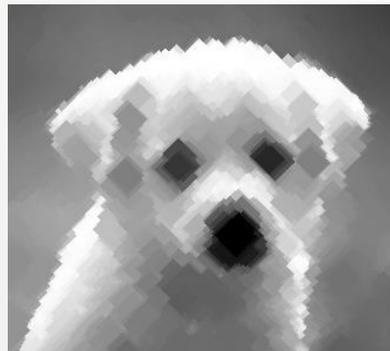
Im



$ASF_{of, \Gamma_4, \Gamma_4}^2(Im)$



$ASF_{of, \Gamma_4, \Gamma_4}^2(Im) \circ 2\Gamma_4 \bullet 4\Gamma_4$



$ASF_{of, \Gamma_4}^2(Im) \bullet 11\Gamma_4$

ASF par reconstruction

Les ASF par reconstruction fusionnent les zones plates d'une image de façon plus efficace qu'une simple ouverture ou fermeture par reconstruction.



I



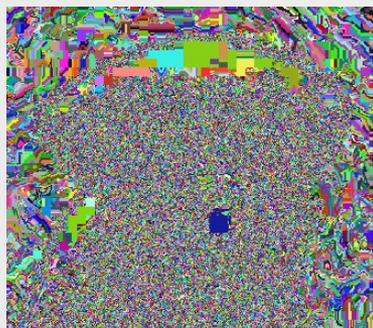
$ASF_{of, \Gamma_8, \Gamma_8}^5(I)$



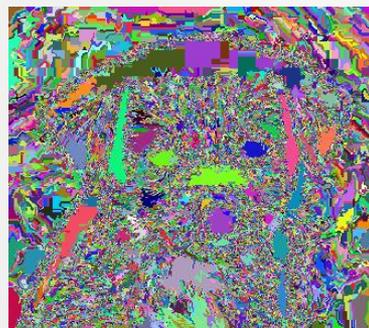
$ASF_{of, \Gamma_8, \Gamma_8}^{17}(I)$



$ASF_{of, \Gamma_8, \Gamma_8}^{40}(I)$



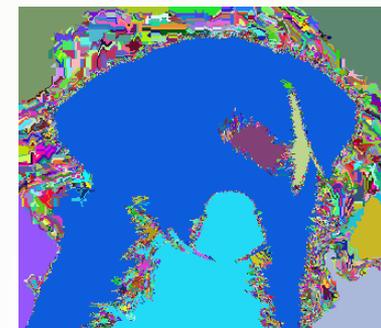
53218 zones plates



30838 zones plates



18011 zones plates

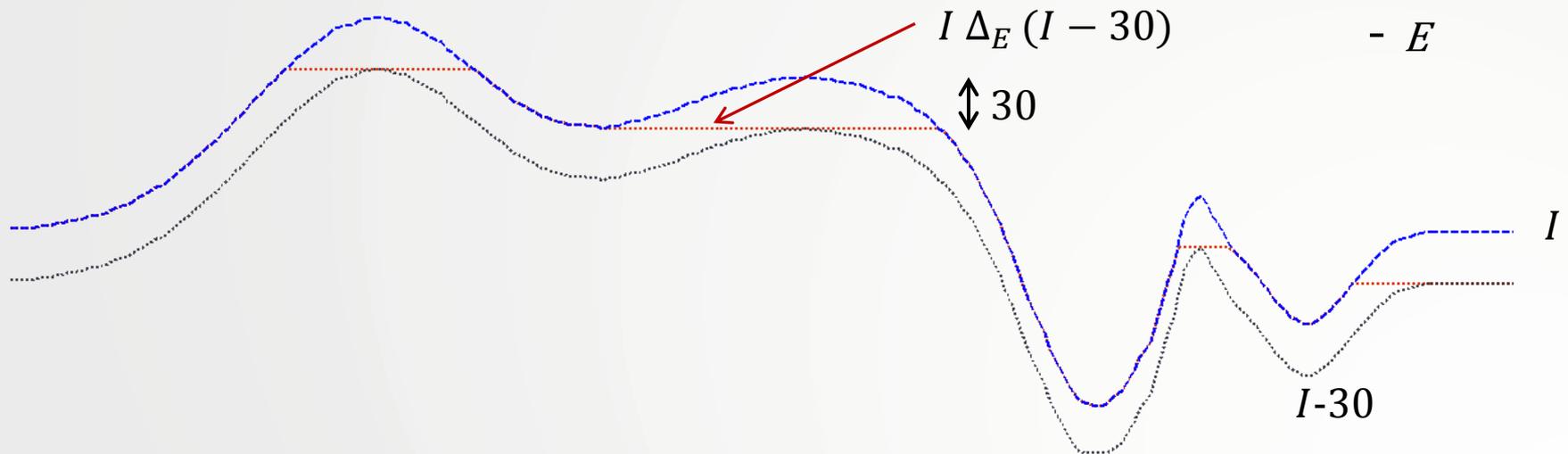


7299 zones plates

H-extrema

Le but des h-extrema est de supprimer des montagnes (ou des vallées) dont la hauteur (ou profondeur) est inférieure à h . C'est un filtre basé non pas sur la taille des éléments (largeur), **mais sur leur hauteur**.

Commençons par les h-maxima : comment supprimer, dans le signal 1d ci-dessous, les montagnes de hauteur inférieure à 30 ?



H-extrema

On peut définir la transformation h-maxima :

Soient $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, $E \subset \mathbb{Z}^n$ et $h \in B$, le **h-maxima** de I (sous E) est

$$HMAX_{h,E}(I) = I \Delta_E (I - h)$$

Le h-minima se définit de la même manière :

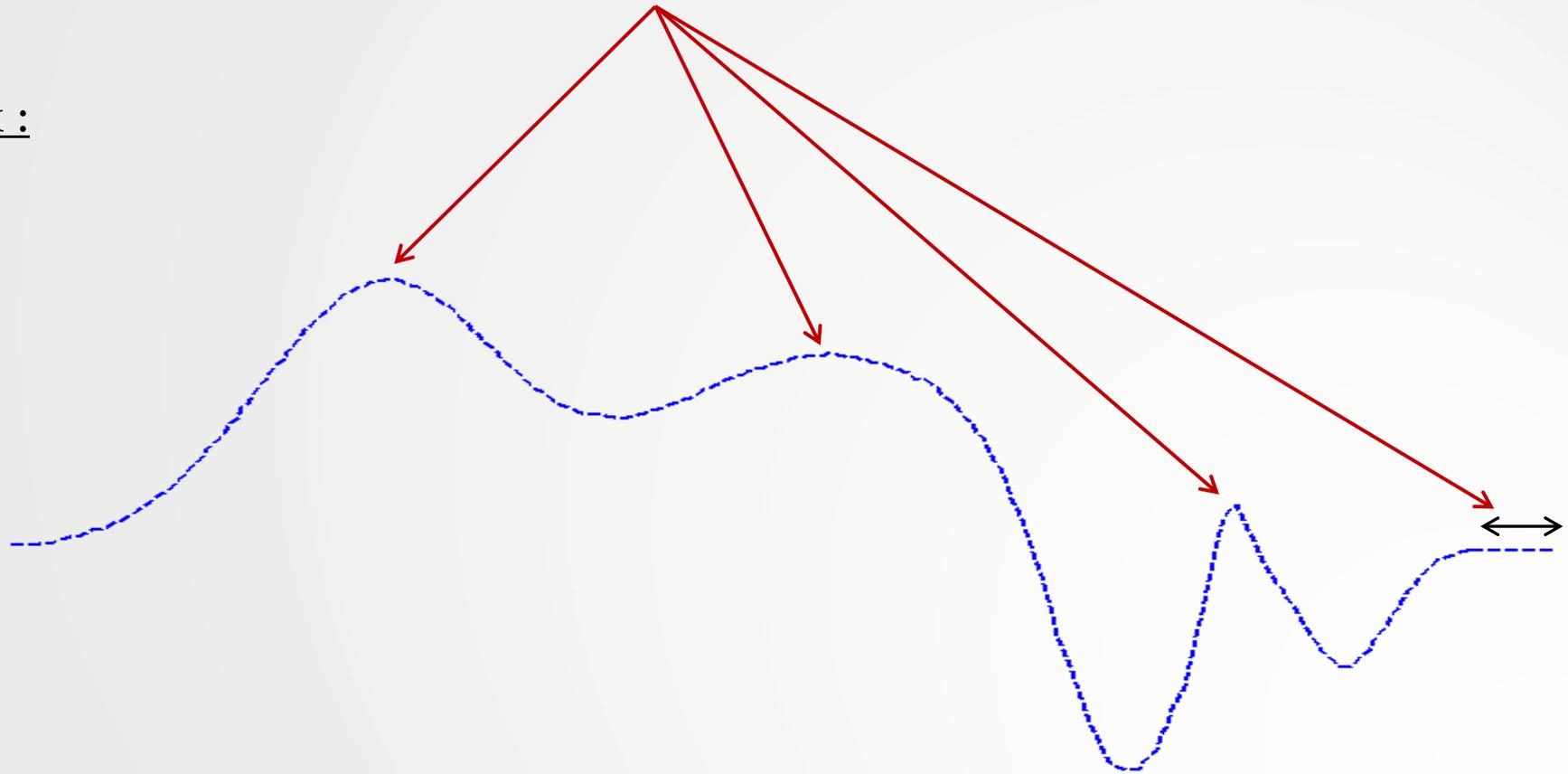
Soient $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$, $E \subset \mathbb{Z}^n$ et $h \in B$, le **h-minima** de I (sous E) est

$$HMIN_{h,E}(I) = I \nabla_E (I + h)$$

Extrema régionaux

Un maximum (minimum) régional est une zone plate qui n'est pas adjacente à une zone plate de plus haute (basse) altitude.

Ex :



Extrema régionaux

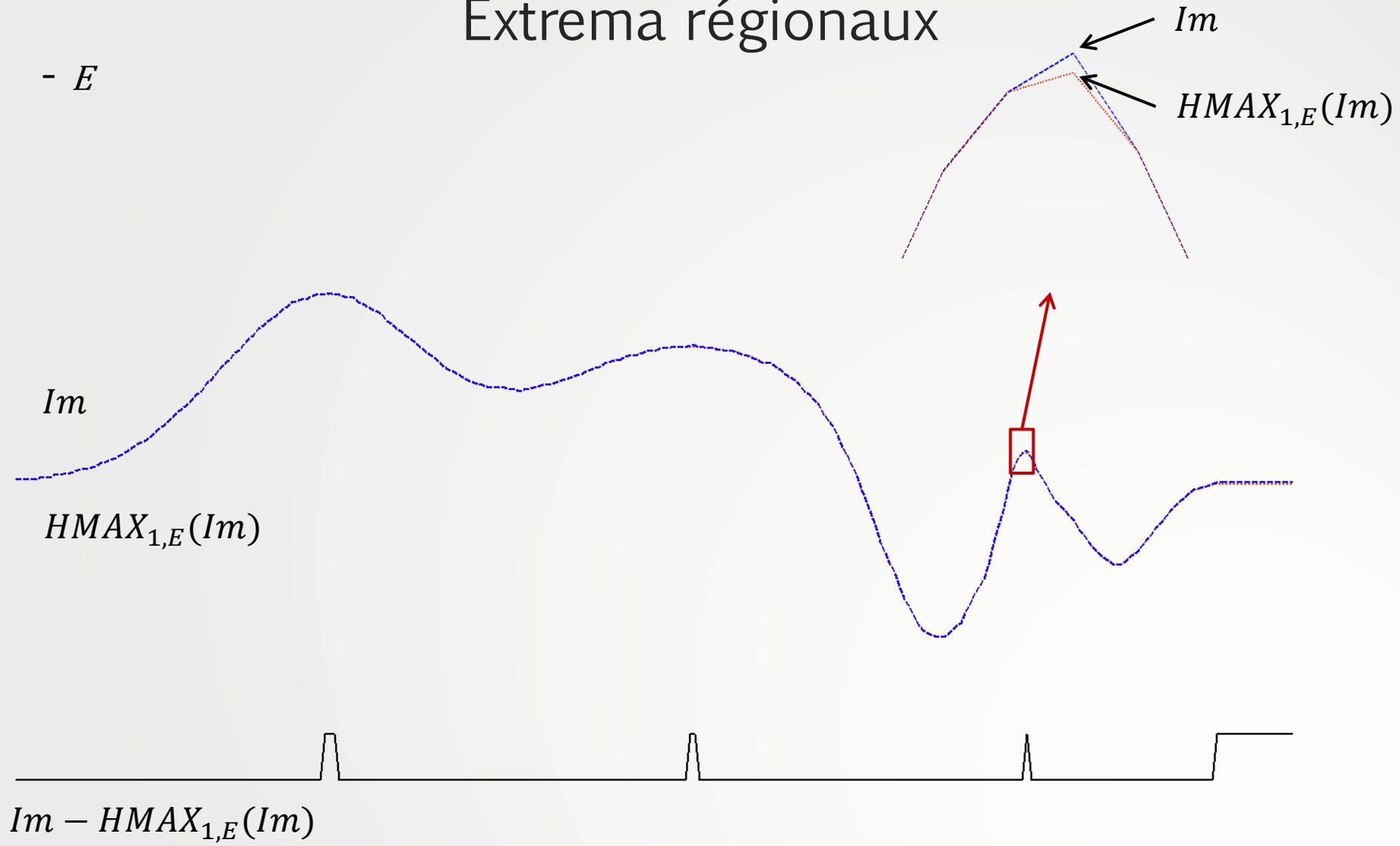
Comment obtenir les maxima régionaux ?

Un maximum régional est une zone plate qui n'est pas adjacente à une zone plate de plus haute altitude : c'est donc **le sommet d'une montagne de l'image.**

Une transformation h-max, avec $h=1$, supprimera tous les sommets de toutes les montagnes.

Le résidu d'une telle transformation permettra de récupérer les sommets des montagnes, donc les maxima régionaux.

Extrema régionaux



Extrema régionaux

On peut définir la transformation de **maximum** et **minimum régional** :

Soient $I: A \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ et $E \subset \mathbb{Z}^n$,

$$RMAX_E(I) = I - HMAX_{1,E}(I) \quad \text{(maximum régional)}$$

$$RMIN_E(I) = HMIN_{1,E}(I) - I \quad \text{(minimum régional)}$$

Extrema régionaux : applications

Les extrema régionaux sont assez utiles pour mettre en valeur des objets selon leur « luminosité locale » plutôt que leur forme...

Par exemple, pour améliorer des images astronomiques (en vue de compter les étoiles)



I_m



$I_m - HMAX_{51, \Gamma_8}(I_m)$

La ligne de partage des eaux (LPE ou Watershed)

La LPE

La **LPE** est un **algorithme de segmentation** : elle permet de trouver avec précision les contours d'un objet dans une image.



Image originale



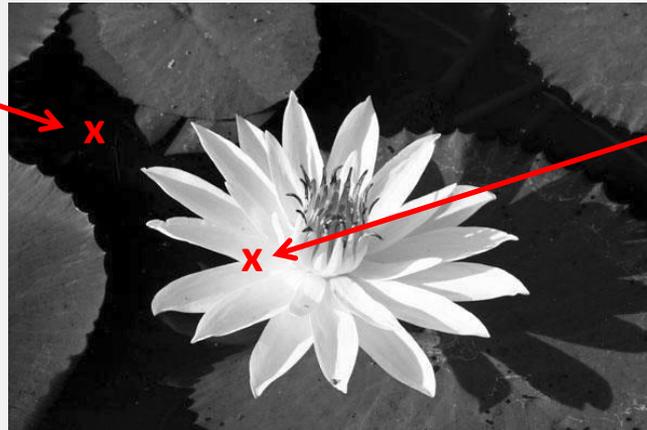
Gradient

Le gradient morphologique permet d'obtenir les contours de tous les objets : ici, ce que l'on souhaite, c'est obtenir le contour d'un objet spécifique.

Les marqueurs

Pour fonctionner, l'algorithme a besoin d'une **image de marqueurs**, où l'utilisateur aura marqué quelques pixels appartenant à l'objet et à son complémentaire.

Un pixel situé à l'extérieur de la fleur



Un pixel situé à l'intérieur de la fleur

L'image des marqueurs permet d'apporter à l'algorithme une connaissance sur l'objet à segmenter.

Le relief

Enfin, il nous faut **une image de relief** (calculée en généralement automatiquement à partir de l'image originale), où les contours qui nous intéressent apparaissent avec une valeur élevée.



Gradient

On choisit en général une image issue **d'un détecteur de contours**.

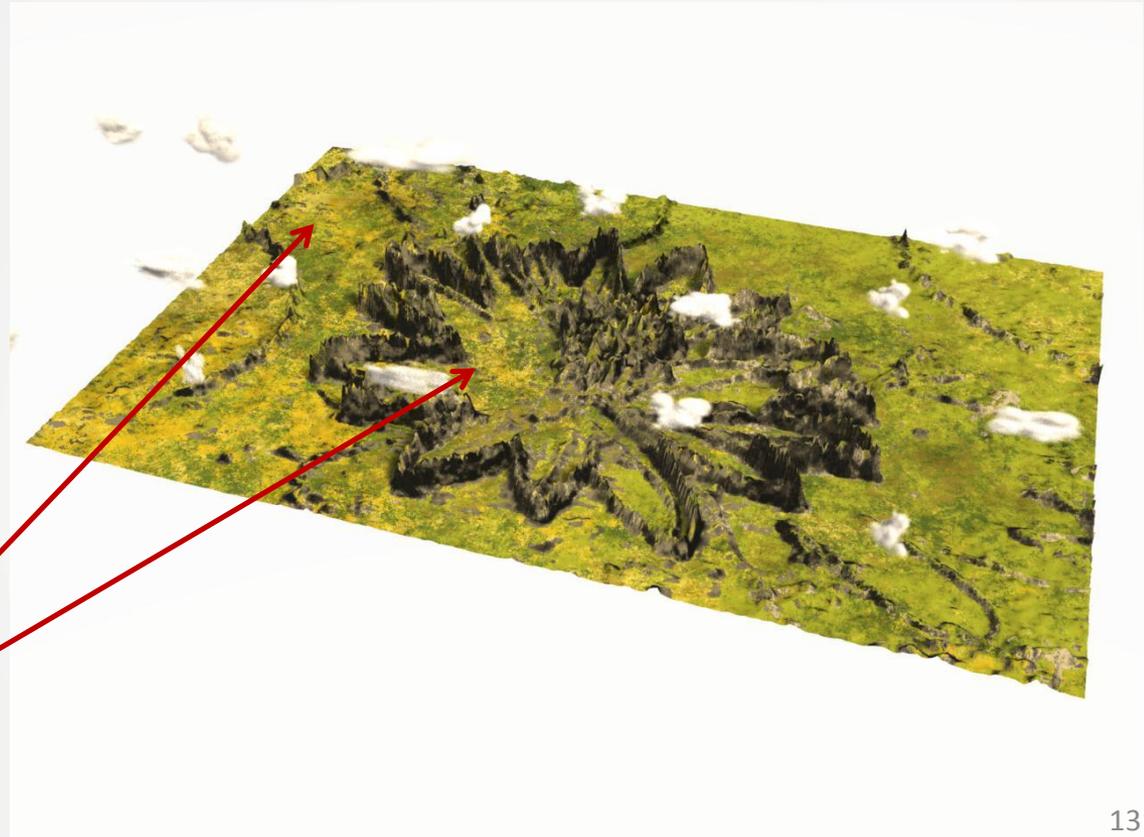
Inondation

On considère l'image de relief comme un terrain topographique.

On connecte des pompes qui injecteront de l'eau (de différentes couleurs) à l'endroit des marqueurs.



On place une pompe ici
et une autre là



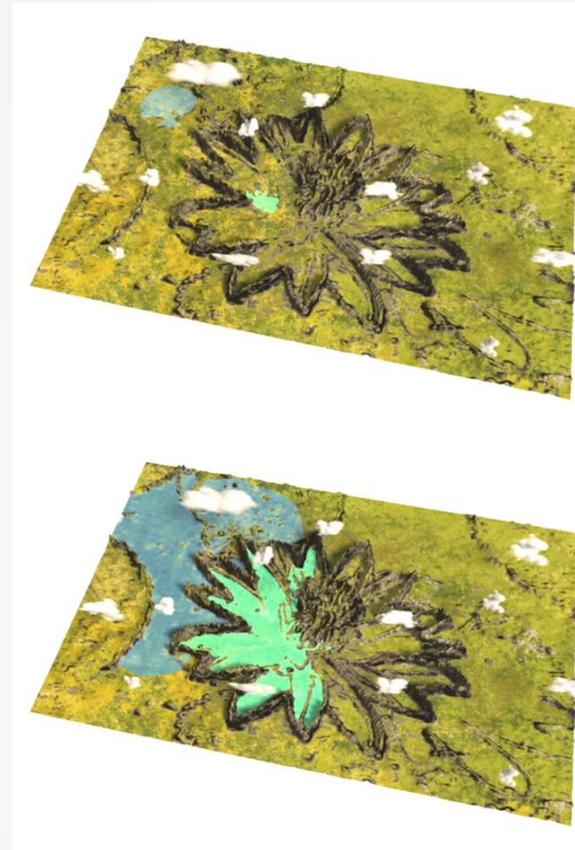
Inondation

On considère l'image de relief comme un terrain topographique.

On connecte des pompes qui injecteront de l'eau (de différentes couleurs) à l'endroit des marqueurs.

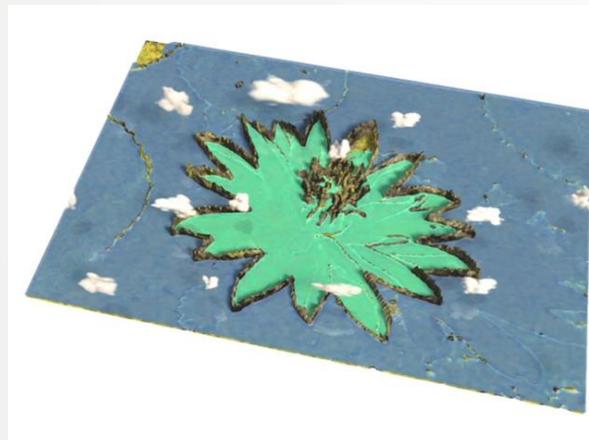
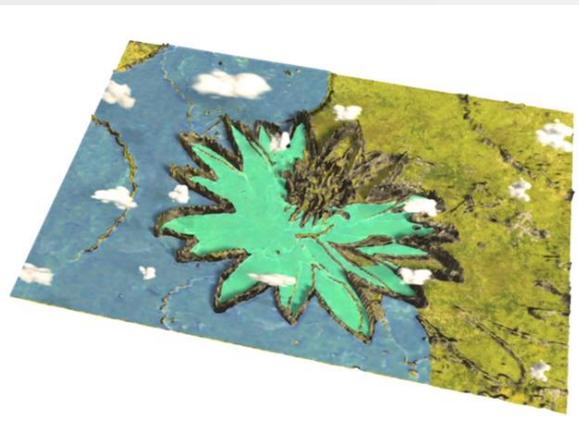
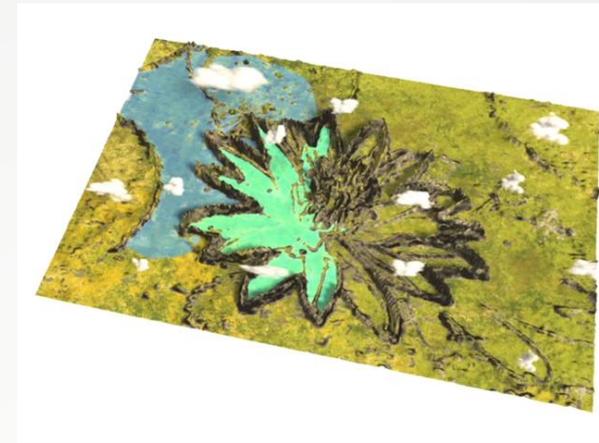
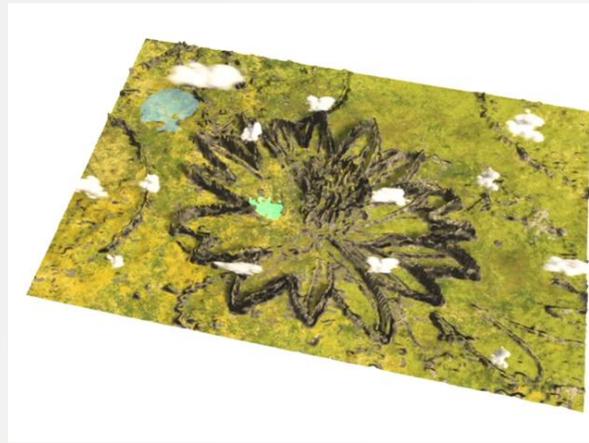
. **Deux lacs** de couleurs différentes **vont se former et grandir** petit à petit.

. Lorsque les deux lacs se rencontreront, ils **ne se mélangeront pas**.



Inondation

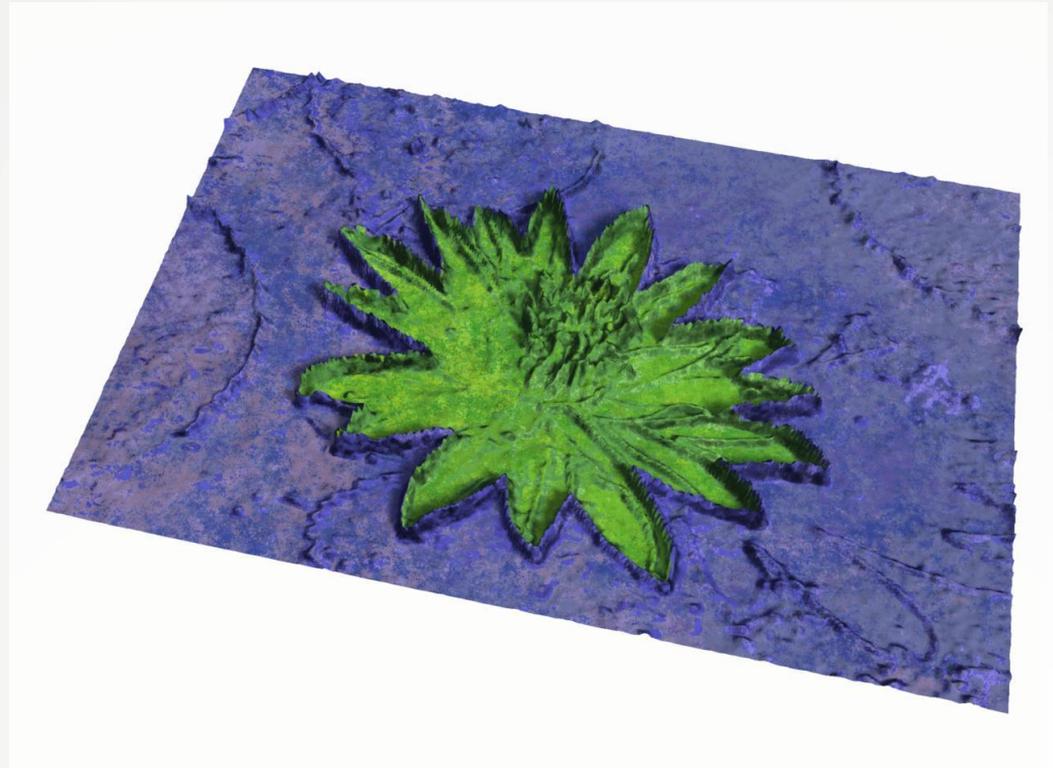
Voici le processus dans son intégralité :



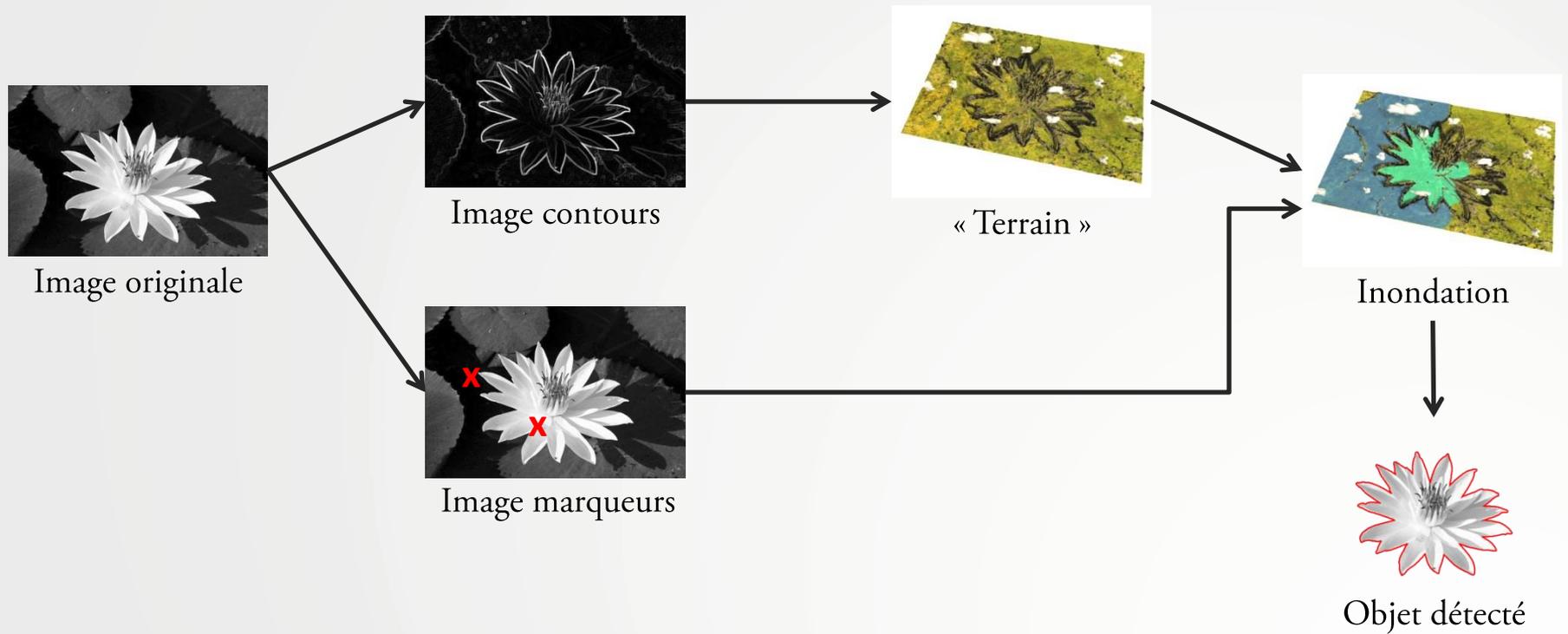
Résultats

Une fois l'inondation terminée, on regarde les parties du terrain qui sont sous le lac vert.

Ces parties correspondent, dans l'image de départ, aux pixels appartenant à la fleur.



Récapitulatif



Algorithme

On pose :

- . I l'image de relief de départ (gradient morphologique par exemple),
- . M l'image des marqueurs : chaque pixel vaut soit 0 (pixel hors marqueur) soit la valeur de l'objet auquel il appartient.
- . E un élément structurant de voisinage

Algorithme

Initialisation :

Liste $L = \emptyset$

$R = M$

Pour chaque $x \in M, L = L \cup \{(x, I(x))\}$

Déroulement :

Tant que $L \neq \emptyset$

Choisir $(x, I(x)) \in L$ tel que $I(x)$ soit minimal dans L

$L = L \setminus \{(x, I(x))\}$

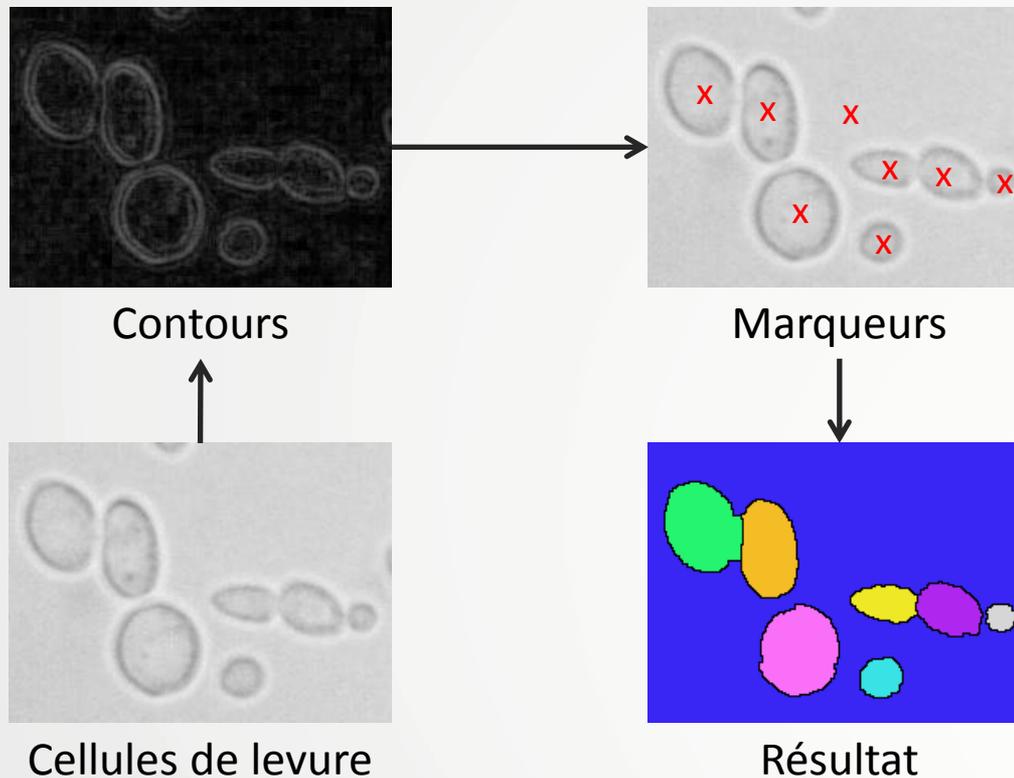
Pour tout $y \in E_x$ tel que $R(y) = 0$

$R(y) = R(x)$

$L = L \cup \{(y, I(y))\}$

Plusieurs objets

On peut aussi, en mettant plus d'un marqueur, **détecter plusieurs objets** sur une image.



Conclusion

La ligne de partage des eaux permet de segmenter (trouver les frontières) d'objets dans une image.

La fonction de relief est souvent le gradient de l'image.

La tâche difficile consiste à trouver de bons marqueurs pour les objets (par trop, pas trop peu, pour obtenir les bonnes frontières). Il faut bien analyser le problème, et utiliser les outils de morphologie vus précédemment.

13

Conclusion

Conclusion sur les outils morphologiques

La morphologie propose un **ensemble d'outils pour nettoyer et traiter** des images.

Différents filtres, comme les filtres par reconstruction, permettent d'effectuer une pré-segmentation en diminuant le nombre de zones plates de l'image.

La ligne de partage des eaux permet, en marquant certains objets d'intérêt, d'extraire facilement les objets d'une image.

Beaucoup de **différentes implémentations existent**, produisant des résultats différents (nous avons vu l'une des plus simples).