Modèles semi-factoriels et modèles de Néron

Cédric Pépin

Résumé

Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète de corps de fonctions K. Soit X un schéma sur S. On dira que X est *semi-factoriel sur S* si tout faisceau inversible sur la fibre générique X_K se prolonge en un faisceau inversible sur X. On montre ici que tout schéma propre géométriquement normal sur K possède un modèle propre, plat, normal et semi-factoriel sur S. On construit également des compactifications semi-factorielles de S-schémas réguliers, tels que les modèles de Néron des variétés abéliennes.

La propriété de semi-factorialité pour un schéma X/S correspond à la propriété de Néron de son foncteur de Picard. En particulier, on peut retrouver le modèle de Néron de la variété de Picard $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ de X_K à partir du foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{X/S}$, comme dans le cas connu des courbes. On en tire des conséquences sur l'équivalence algébrique relative sur le S-schéma X.

Table des matières

1 Introduction

Soit S un trait, c'est-à-dire le spectre d'un anneau de valuation discrète. On note K son corps de fonctions.

Définition 1.1. *Soit $X \to S$ un S-schéma. On dit que X est* semi-factoriel sur S *si l'homomorphisme de restriction*

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_K)$$

est surjectif.

Un S-schéma X est donc semi-factoriel si pour tout $\mathcal{O}_{X_K}$-module inversible $\mathcal{L}_K$, il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L} \otimes K$ soit isomorphe à $\mathcal{L}_K$. La terminologie « semi-factoriel » provient du cas où le schéma X est localement factoriel : il est alors automatiquement semi-factoriel sur S ([EGA IV] 21.6.10).

En l'absence actuelle d'un théorème de désingularisation général, on ne peut pas assurer qu'un schéma propre et lisse sur K possède un modèle propre et plat sur S, qui soit un schéma *régulier*.

Dans les sous-sections 2.1 à 2.4, on montre néanmoins que tout schéma X_K qui est propre géométriquement normal sur K possède un modèle X propre, plat, normal et *semi-factoriel sur* S (théorème 2.6). Plus généralement, on considère un trait T qui est limite projective filtrante de traits étales sur S, et on construit des modèles X semi-factoriels sur S et qui le restent après le changement de trait $T \to S$ (corollaire 2.12). Lorsque l'on prend pour T un hensélisé strict S^{hs} de S, la construction fournit même des modèles qui commutent à des changements de trait plus généraux que $S^{\mathrm{hs}} \to S$, que l'on a qualifiés de *permis* (définition 2.13 et théorème 2.17).

Dans la sous-section 2.5, on part d'un schéma X de type fini, séparé et plat sur S. Lorsque X est *régulier*, on construit des compactifications normales $\overline{X}$ de X telles que la restriction $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(X)$ soit surjective (théorème 2.21). Cela s'applique par exemple au cas où X/S est le modèle de Néron d'une variété abélienne (corollaire 2.23). Dans la sous-section 2.6, on montre une variante des énoncés de semi-factorialité sur un schéma de Dedekind global, et dans la sous-section 2.7, on examine le cas d'un K-schéma propre non normal.

Pour construire des modèles semi-factoriels, on procède en deux étapes. On considère d'abord un morphisme lisse de type fini $f : Y \to B$ entre schémas noethériens, et un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent $\mathcal{M}$ qui est inversible au-dessus d'un ouvert schématiquement dense $U \subset B$. En utilisant les techniques de platification de Raynaud-Gruson [RG], on montre alors qu'après un éclatement bien choisi *de la base* B centré en dehors de U, le faisceau $\mathcal{M}|_{f^{-1}(U)}$ possède un prolongement inversible sur Y (théorème 2.1). On applique ensuite cet énoncé à une situation universelle $f := p_1 : X \times_S \Lambda \to X$, où X est un modèle propre et plat de X_K. L'espace de paramètres Λ est construit à partir du schéma de Picard rigidifié de X_K et du modèle de Néron de sa composante neutre réduite. Un effort particulier a été fait pour que la construction fonctionne même en l'absence de point K-rationnel sur X_K.

Dans la section 3, on considère un K-schéma propre géométriquement normal et géométriquement connexe X_K, ainsi qu'un modèle propre et plat X/S de X_K, semi-factoriel après l'extension S^{hs}/S. Lorsque $\mathrm{Pic}_{X_K/K}(K^{\mathrm{hs}}) = \mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{hs}}})$ (par exemple si $X_K(K^{\mathrm{hs}}) \neq \emptyset$ ou si le corps résiduel de S est parfait), la semi-factorialité de $X_{S^{\mathrm{hs}}}/S^{\mathrm{hs}}$ signifie précisément que le foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$ vérifie la propriété de Néron d'extension des points étales. On peut alors retrouver le modèle de Néron A de la variété de Picard $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ à partir du foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (théorèmes 3.3 et 3.4). En dimension relative 1, où l'on peut utiliser des modèles *réguliers* de X_K, il s'agit du théorème [R] 8.1.4 de Raynaud. Une fois que l'on dispose des modèles semi-factoriels, la méthode se généralise tout de suite en dimension supérieure, à ceci près que le foncteur de Picard n'est plus formellement lisse en général. Il faut donc ajouter une étape de *lissification des groupes*, au sens de [BLR] page 174.

En analysant le lien entre les composantes neutres de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ et A dans la situation précédente, on obtient des informations sur l'équivalence algébrique sur le S-schéma X. Plus précisément, supposons S hensélien à corps résiduel algébriquement clos. Soit n l'exposant du groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de A/S. Si $\mathcal{L}_K$ est un faisceau inversible algébriquement équivalent à zéro sur X_K, alors $\mathcal{L}_K^{\otimes n}$ peut se prolonger en un faisceau inversible sur X algébriquement équivalent à zéro relativement à S (corollaire 3.15). Cette information sera utilisée dans

[P] pour exprimer le symbole de Néron attaché à X_K ([N] II 9.3) en termes de multiplicités d'intersection sur X.

Remerciements. Je tiens à remercier Michel Raynaud pour m'avoir confié la construction des modèles semi-factoriels, et pour m'avoir fait découvrir les *Éléments de géométrie algébrique.* Je remercie également Qing Liu pour de nombreuses discussions ayant contribué à améliorer le texte. Je remercie Laurent Moret-Bailly pour ses remarques pertinentes, ayant permis notamment de renforcer les énoncés 2.22 et 3.11 initiaux. Je remercie Pascal Autissier pour plusieurs discussions, ayant donné lieu à l'énoncé 2.26. Je remercie Siegfried Bosch et Dino Lorenzini pour leur relecture et leurs commentaires utiles. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses suggestions constructives.

2 Construction des modèles semi-factoriels

2.1 Un théorème pour les morphismes lisses

Rappelons ([RG] 5.1.3) que si U est un ouvert d'un schéma localement noethérien S, un éclatement *U-admissible* de S est un éclatement $S' \to S$ centré en dehors de U. C'est en particulier un isomorphisme au-dessus de U. Nous allons travailler avec un ouvert U *schématiquement dense* dans S ([EGA IV] 11.10.2). Lorsque S est localement noethérien, cela signifie que U contient tous les *points associés* à S ([EGA IV] 3.1.8). Si $S' \to S$ est un éclatement U-admissible avec U schématiquement dense dans S, l'image réciproque de U dans S' est schématiquement dense dans S' ([RG] 5.1.2 (iii)).

Par ailleurs, étant donné un morphisme de schémas $f : X \to S$ et un sous-schéma ouvert $U \subseteq S$, on notera $X_U := X \times_S U$. Lorsque l'on considère un changement de base de la forme $S' \to S$, on notera avec un $'$ les images réciproques qui s'en déduisent.

Théorème 2.1. *Soient S un schéma noethérien, U un ouvert schématiquement dense dans S, $f : X \to S$ un S-schéma lisse de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Supposons que le $\mathcal{O}_{X_U}$-module $\mathcal{M}|_{X_U}$ soit inversible. Alors il existe un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[u, leftarrow, "f"'] & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $S' \to S$ est un éclatement U-admissible, et un $\mathcal{O}_{X'}$-module inversible $\widetilde{\mathcal{M}}$ *tel que*

$$\widetilde{\mathcal{M}}|_{X'_{U'}} = \mathcal{M}'|_{X'_{U'}}.$$

Commençons par un critère pour qu'un module cohérent sur un S-schéma lisse soit inversible.

Proposition 2.2. *Soient S un schéma localement noethérien, U un ouvert dense de S, $f : X \to S$ un S-schéma lisse, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. On suppose que $\mathcal{M}$ est inversible sur X_U, S-plat, sans composante immergée sur les fibres de X/S (i.e. $\mathcal{M} \otimes k(s)$ est sans composante immergée pour tout $s \in S$). Alors $\mathcal{M}$ est inversible.*

Dans la démonstration, et dans la suite du texte, on utilise la notion d'ouvert *S-dense* d'un S-schéma lisse X, c'est-à-dire dense dans chaque fibre de X/S.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $s \in S$, le module $\mathcal{M} \otimes k(s)$ est inversible sur $f^{-1}(s)$. En effet, soient dans ce cas $x \in X$ et $s = f(x)$. Comme $\mathcal{M} \otimes k(s)$ est inversible, il existe, quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x, un homomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_X \to \mathcal{M}$ tel que $\alpha_x \otimes k(s)$ soit bijectif. Par Nakayama, le conoyau de α_x est nul. Notant $\mathcal{N}$ le noyau de α, on a donc une suite exacte de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{M}_x \longrightarrow 0.$$

Alors, $\mathcal{M}_x$ étant $\mathcal{O}_{S,s}$-plat, on a $\mathcal{N}_x \otimes k(s) = 0$ puis $\mathcal{N}_x = 0$ à nouveau par Nakayama. Ainsi, α est un isomorphisme au voisinage de x.

Prouvons donc que $\mathcal{M}$ est inversible sur les fibres de f. Notons d'abord que $\mathcal{M}$ est inversible sur un ouvert S-dense W de X. En effet, le critère de platitude par fibres ([EGA IV] 11.3.10) et le théorème de platitude générique ([EGA IV] 6.9.1) assurent que $\mathcal{M}$ est localement libre sur un ouvert S-dense de X. Alors $\mathcal{M}$ est inversible sur cet ouvert puisqu'il l'est déjà sur l'ouvert dense X_U.

Soient $s \in S - U$. Choisissons une générisation η de s dans U. D'après [EGA II] 7.1.9, il existe un trait T et un morphisme $T \to S$ envoyant le point fermé t de T sur s et son point générique sur η. Le schéma $X_T := X \times_S T$ est alors régulier. Notons $\mathcal{M}_T$ l'image réciproque de $\mathcal{M}$ sur X_T. Il est de profondeur au moins 2 en tout point z de $X_T - W_T$: cela résulte de [EGA IV] 6.3.1, puisque le point z n'est pas associé à $\mathcal{M}_T \otimes k(t)$ et que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{T,t}) = 1$. On en déduit que le module $\mathcal{M}_T$ sur le schéma régulier X_T est *réflexif* (cf. [S], §3, Corollaires 2 et 3). En particulier, il est sans torsion, et étant de rang 1, c'est un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_{X_T}$. Mais un idéal fractionnaire réflexif est divisoriel ([B AC] Chap. 7, §4, n°2, Exemple 2), et par conséquent $\mathcal{M}_T$ est inversible sur le schéma localement factoriel X_T. Sa restriction à la fibre fermée de X_T/T est inversible, donc $\mathcal{M} \otimes k(s)$ est inversible. □

Pour réaliser une situation dans laquelle la proposition 2.2 s'applique, nous avons besoin d'un procédé d'élimination des composantes immergées (comparer à [BLR IV] 2.3).

Rappelons ([EGA IV] 5.9.9) que si Z est un fermé d'un schéma localement noethérien X, et i l'injection canonique $(X - Z) \to X$, alors un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ est dit *Z-clos* si le morphisme canonique $\mathcal{M} \to i_*(\mathcal{M}|_{X-Z})$ est bijectif.

Théorème 2.3. *Soient S un schéma noethérien, U un ouvert schématiquement dense dans S, $f : X \to S$ un S-schéma de type fini et plat à fibres géométriquement réduites, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Supposons que $\mathcal{M}|_{X_U}$ soit localement libre de rang ≥ 1, et qu'il existe un ouvert S-dense V de X tel que $\mathcal{M}|_V$ soit localement libre. Alors il existe un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[u, leftarrow, "f"'] & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $S' \to S$ est un éclatement U-admissible, et un $\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent $\widetilde{\mathcal{M}}$ vérifiant les conditions suivantes : notant avec un $'$ les images réciproques par $S' \to S$,

– *$\widetilde{\mathcal{M}}$ coïncide avec $\mathcal{M}'$ sur $X'_{U'} \cup V'$;*
– *$\widetilde{\mathcal{M}}$ est S'-plat ;*
– *$\widetilde{\mathcal{M}}$ est sans composante immergée sur les fibres de X'/S'.*

En particulier, le $\mathcal{O}_{X'}$-module $\widetilde{\mathcal{M}}$ est Z'-clos pour $Z' := X' - (X'_{U'} \cup V')$.

La dernière assertion résulte du lemme suivant.

On utilise la notation Ass(·) pour « l'ensemble des points associés à ».

Lemme 2.4. *Soient S et X des schémas localement noethériens, U un ouvert schématiquement dense dans S, $f : X \to S$ un S-schéma à fibres réduites, W un ouvert S-dense de X contenant X_U, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent S-plat. Supposons que* $\mathrm{Ass}(\mathcal{M} \otimes k(s))$ *soit contenu dans* $\mathrm{Ass}(X_s)$ *pour tout $s \in S$ (par exemple, $\mathcal{M}$ sans composante immergée sur les fibres de X/S et localement libre sur W de rang ≥ 1). Alors $\mathcal{M}$ est Z-clos pour $Z := X - W$.*

Démonstration. D'après [EGA IV] 5.10.5, il s'agit de voir que

$$\mathrm{prof}_Z(\mathcal{M}) \geq 2.$$

Soit $z \in Z$. Le point $f(z)$ n'est pas dans l'ouvert schématiquement dense U de S, ce n'est donc pas un point associé à S, autrement dit $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{S,f(z)}) \geq 1$. De plus, le point z n'est pas un point générique de X_s, et n'est donc pas associé à $\mathcal{M} \otimes k(s)$ d'après les hypothèses, d'où $\mathrm{prof}((\mathcal{M} \otimes k(s))_z) \geq 1$. Conclusion, $\mathrm{prof}(\mathcal{M}_z) \geq 2$ ([EGA IV] 6.3.1). □

Le lemme 2.4 permet également de ramener la preuve du théorème 2.3 au cas où X est un schéma affine.

En effet, supposons d'abord qu'il existe un recouvrement ouvert $X = X_1 \cup X_2$ tel que le théorème soit vrai pour les morphismes induits $f_i : X_i \to S$ par f et les modules $\mathcal{M}|_{X_i}$, pour $i = 1, 2$. Il existe alors des éclatements U-admissibles $\varphi_i : S_i' \to S$ d'idéaux cohérents $\mathcal{I}_i$ de $\mathcal{O}_S$ et des modules $\widetilde{\mathcal{M}}_i$ qui sont solutions du problème pour les f_i. Soit $\varphi : S'' \to S$ l'éclatement U-admissible du produit $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$ dans S. D'après [RG] 5.1.2 (v), on a $\varphi = \gamma_i \circ \varphi_i$ où $\gamma_i : S'' \to S_i'$ est l'éclatement $(\varphi_i)^{-1}(U)$-admissible de $(\prod_{j \neq i} \mathcal{I}_j)\, \mathcal{O}_{S_i'}$ dans S_i'. D'où des carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "f_i"] & X_i' \arrow[l] \arrow[d, "f_i'"] & X_i'' \arrow[l, "\Gamma_i"'] \arrow[d, "f_i''"] \\
S & S_i' \arrow[l, "\varphi_i"'] & S''. \arrow[l, "\gamma_i"'] \arrow[ll, bend left, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

L'image réciproque $f'' : X'' \to S''$ de $f : X \to S$ par φ est alors le recollement de f_1'' et f_2''. On pose

$$\widetilde{\mathcal{M}}|_{X_i''} := (\Gamma_i)^* \widetilde{\mathcal{M}}_i.$$

Ce $\mathcal{O}_{X_i''}$-module coïncide avec le $\mathcal{O}_{X''}$-module $\mathcal{M}''$ sur

$$(X''_{U''} \cup V'') \cap X_i''.$$

En particulier $\widetilde{\mathcal{M}}|_{X_i''}$ est localement libre sur cet ouvert, de rang ≥ 1. Mais comme il est sans composante immergée sur les fibres de f_i'', il résulte du lemme 2.4 qu'il est $Z'' \cap X_i''$-clos pour $Z'' = X'' - (X''_{U''} \cup V'')$. Par conséquent, les faisceaux $\widetilde{\mathcal{M}}|_{X_i''}$ pour $i = 1, 2$ se recollent en un $\mathcal{O}_{X''}$-module $\widetilde{\mathcal{M}}$, qui est solution du problème pour le module $\mathcal{M}$.

Par récurrence, on en déduit que si $X = \cup_{i=1}^n X_i$ pour un certain $n \geq 1$ de sorte que le théorème soit vrai pour les X_i/S et les $\mathcal{M}|_{X_i}$, alors le théorème est vrai pour X/S et $\mathcal{M}$. Comme le schéma X est quasi-compact, on est ainsi ramené à la

Démonstration du théorème 2.3 lorsque X est affine. Notons $\mathcal{M}^*$ le $\mathcal{O}_X$-module dual de $\mathcal{M}$. C'est un module cohérent sur le schéma affine X. Il existe donc un entier $r \geq 1$ et un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire surjectif $u : \mathcal{O}_X^r \twoheadrightarrow \mathcal{M}^*$. En composant le morphisme injectif dual $\mathcal{M}^{**} \hookrightarrow \mathcal{O}_X^r$ avec le morphisme canonique $c : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{**}$, on obtient un morphisme $v : \mathcal{M} \to \mathcal{O}_X^r$.

Par hypothèse, le module $\mathcal{M}$ est localement libre au-dessus de U. Il en va donc de même pour le noyau de u, puis pour le conoyau $\mathcal{N}$ de v. En particulier, le module $\mathcal{N}|_{X_U}$ est U-plat.

On peut donc appliquer le théorème 5.2.2 de [RG], pour obtenir un éclatement U-admissible $S' \to S$ tel que le transformé strict $\overline{\mathcal{N}'}$ de $\mathcal{N}$ sur X' soit S'*-plat*. Le $\mathcal{O}_{X'}$-module $\overline{\mathcal{N}'}$ est quotient de l'image réciproque $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$. En particulier, il est cohérent et le morphisme surjectif $\mathcal{O}_{X'}^r \twoheadrightarrow \mathcal{N}'$ induit un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{X'}^r \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{N}'}$. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ son noyau, cohérent et S'-plat. Pour tout $s' \in S'$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \otimes k(s') \longrightarrow \mathcal{O}^r_{X'_{s'}} \longrightarrow \overline{\mathcal{N}'} \otimes k(s') \longrightarrow 0.$$

Le S'-schéma $X' \to S'$ étant à fibres réduites, on en déduit que $\widetilde{\mathcal{M}}$ est sans composante immergée sur les fibres de X'/S'.

Montrons enfin que $\mathcal{M}' = \widetilde{\mathcal{M}}$ sur l'ouvert $X'_{U'} \cup V'$. Comme par hypothèse $\mathcal{M}$ est localement libre non seulement sur X_U, mais aussi sur la réunion $X_U \cup V$, le conoyau $\mathcal{N}$ de v est localement libre sur celle-ci. Le morphisme $v' : \mathcal{M}' \to \mathcal{O}^r_{X'}$ est donc injectif sur $X'_{U'} \cup V'$. De plus, par définition du transformé strict, l'image réciproque $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ coïncide avec $\overline{\mathcal{N}'}$ sur cet ouvert (noter que l'ouvert U' de S' est schématiquement dense, comme rappelé plus haut). D'où $\mathcal{M}' = \widetilde{\mathcal{M}}$ sur $X'_{U'} \cup V'$ par définition de $\widetilde{\mathcal{M}}$. □

Démonstration du théorème 2.1. Grâce au théorème de platification [RG] 5.2.2, on peut supposer $\mathcal{M}$ plat sur S, et donc inversible sur un ouvert S-dense de X/S (*loc. cit* 2.1). Il suffit alors d'appliquer 2.3 puis 2.2. □

Remarque 2.5. Soit $\pi : X \to S$ un morphisme régulier de schémas noethériens, muni d'une section σ. Si S est excellent et réduit, et si X est le seul voisinage de $\sigma(S)$ dans X, alors Boutot démontre un énoncé analogue à celui du théorème 2.1, utile pour son étude du schéma de Picard local ([B] V 2.4).

2.2 La situation universelle : énoncé du théorème et esquisse de la preuve

Si S est un trait de corps de fonctions K, un *modèle* sur S d'un K-schéma X_K est un S-schéma X de fibre générique isomorphe à X_K. Si X est plat sur S, les points associés à X sont les mêmes que les points associés à X_K ([EGA IV] 3.3.1). Dans ce cas, si le schéma X est localement noethérien, il est réduit (resp. intègre) si et seulement si X_K l'est (*loc. cit.* 3.2.1). Par ailleurs, tout K-schéma propre possède un modèle propre et plat sur S, d'après la version relative du théorème de compactification de Nagata (cf. Deligne [D], Conrad [C] et Lütkebohmert [L]).

Avec l'énoncé suivant, nous allons voir que tout K-schéma propre géométriquement normal possède un modèle propre et plat sur S, qui est *normal et semi-factoriel sur* S (définition 1.1). Il est intéressant de disposer de modèles semi-factoriels qui soient normaux, parce que sur un schéma localement noethérien normal, les faisceaux inversibles ont une bonne interprétation en termes de cycles : le groupe de Picard du schéma *s'injecte* dans le groupe des classes de cycles 1-codimensionnels ([EGA IV] 21.6.10).

Théorème 2.6. *Soient $S^{\mathrm{hs}} \to T \to S$ des extensions de traits, telles que la composée $S^{\mathrm{hs}} \to S$ soit une hensélisation stricte de S. Soit X_K un K-schéma propre géométriquement normal.*

Pour tout modèle propre et plat X/S de X_K, il existe un éclatement $X' \to X$ centré dans la fibre fermée de X/S, tel que $(X')_T$ soit semi-factoriel sur T. *Le* *normalisé* $\widetilde{X}$ *de* X' *est un modèle propre et plat de* X_K *sur* S, tel que $(\widetilde{X})_T$ soit normal et semi-factoriel sur T.

Par abus, on dira d'un schéma sur un trait S qui devient semi-factoriel après une extension de traits $T \to S$ qu'il est *semi-factoriel sur* T.

Remarque 2.7. On peut demander en outre que le centre de l'éclatement $X' \to X$ ne rencontre pas le lieu régulier de X (cf. la preuve section 2.3). Ce raffinement nous sera utile dans la section 2.5.

Remarque 2.8. L'énoncé 2.6 s'applique en particulier au cas où $T = S$. Il s'applique également au cas où $T = S^{\mathrm{hs}}$, qui peut être bien plus riche.

Par exemple, si K est un corps de nombres, le théorème de Mordell-Weil pour les variétés abéliennes (et la finitude du groupe de Néron-Severi de X_K) montrent que le groupe $\mathrm{Pic}(X_K)$ est de type fini. Par conséquent, si on prend pour S le spectre du localisé de l'anneau des entiers de K en un idéal maximal, alors pour que la flèche $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_K)$ soit surjective, il suffit que son image contienne un certain ensemble *fini*.

Au contraire, considérons un trait S strictement hensélien. Supposons de plus que $\mathrm{Pic}(X_K) = \mathrm{Pic}_{X_K/K}(K)$ (cf. lemme 3.1). Alors, dès que la variété de Picard A_K de X_K est non triviale, le groupe $\mathrm{Pic}(X_K)$ *n'est pas de type fini*. Pour le voir, introduisons le modèle de Néron A de A_K sur S. Notant k le corps résiduel de S, l'hypothèse hensélienne assure que la réduction $A(K) = A(S) \to A(k)$ est surjective. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Pic}(X_K) \supset \mathrm{Pic}^0(X_K) = A(K)$ n'est pas de type fini dès que $A(k)$ ne l'est pas. Maintenant, considérons la composante neutre A^0_k de la fibre spéciale de A/S. Pour tout entier m premier à la caractéristique de k, la multiplication par m dans A^0_k est une isogénie étale ([BLR] 7.3/2 (b)). Comme k est séparablement clos, il en résulte que le groupe $A^0_k(k)$ est m-divisible. Donc, si $A(k)$ est de type fini, alors $A^0_k(k)$ est fini, puis $A^0_k = 0$ ($A^0_k(k)$ est dense dans A^0_k), et finalement $A_K = 0$ (A_k et A_K ont même dimension).

Le principe de la démonstration du théorème 2.6, disons dans le cas $S = T$, est le suivant. Supposons pour fixer les idées que l'on dispose d'un K-schéma lisse de type fini Λ_K et d'un faisceau inversible $\mathcal{M}_K$ sur $X_K \times_K \Lambda_K$, tel que pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}_K$ sur X_K, il existe $\lambda_K \in \Lambda_K(K)$ vérifiant $\mathcal{L}_K \simeq (1 \times_K \lambda_K)^* \mathcal{M}_K$. Supposons en outre que Λ_K admette un modèle Λ/S tel que

a) $\Lambda \to S$ est lisse de type fini ;

b) tout K-point de Λ_K se prolonge en une S-section de Λ.

Prolongeons alors $\mathcal{M}_K$ en un module cohérent $\mathcal{M}$ sur $X \times_S \Lambda$. Grâce au point a), on peut appliquer le théorème 2.1 au morphisme $p_1 : X \times_S \Lambda \to X$, avec l'ouvert schématiquement dense X_K de X et le module $\mathcal{M}$. On obtient alors un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_S \Lambda & \longleftarrow & X' \times_S \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ X & \longleftarrow & X' \end{array}$$

où $X' \to X$ est un éclatement centré dans la fibre fermée de X/S, et un module *inversible* $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur $X' \times_S \Lambda$ qui prolonge $\mathcal{M}_K$. Si maintenant λ_K paramètre un faisceau inversible $\mathcal{L}_K$ sur X_K, tout $\lambda \in \Lambda(S)$ prolongeant λ_K (point b)) fournit un prolongement inversible de $\mathcal{L}_K$ sur X', à savoir $(1 \times_S \lambda)^* \widetilde{\mathcal{M}}$. Le S-modèle X' de X_K est donc semi-factoriel. *A fortiori*, son normalisé $(X')^{\mathrm{nor}}$ est semi-factoriel sur S, et on verra (lemme 2.11) qu'il est propre sur S.

Maintenant, les faisceaux inversibles sur X_K ne forment pas une famille *limitée*, au sens où ils ne sont pas paramétrés par un K-schéma *de type fini* : le K-schéma $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$ est seulement *localement* de type fini. Cependant, la composante neutre $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ de ce K-groupe est de type fini, et le groupe de Néron-Severi $\mathrm{Pic}_{X_K/K}(K)/\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}(K)$ est de type fini. On peut donc engendrer tous les faisceaux inversibles sur X_K à partir de ceux paramétrés par un sous-K-schéma de type fini de $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$.

Une autre difficulté provient du fait qu'en l'absence de point rationnel sur X_K, *il n'y a pas en général de faisceau inversible universel sur* $X_K \times_K \mathrm{Pic}_{X_K/K}$. Pour contourner ce problème, il faut remplacer le foncteur de Picard de X_K/K par un foncteur de Picard *rigidifié* (cf. [R] n$^\circ$ 2). On récupère alors un faisceau inversible universel (rigidifié) avec lequel travailler. Cependant, en contrepartie, on perd en finitude : la variété de Picard rigidifiée de X_K n'est plus une variété abélienne, et par conséquent ne possède pas en général de modèle de Néron (de type fini) sur S, qui aurait été un bon atout pour construire Λ. Néanmoins, en choisissant bien le rigidificateur de X_K, on peut assurer que la variété de Picard rigidifiée correspondante soit *semi-abélienne*, et en particulier possède un modèle de Néron au sens suivant.

Définition 2.9. *Soient S un trait de corps de fonctions K et N_K un K-schéma lisse et séparé. Un modèle de Néron de N_K sur S est un S-schéma lisse et séparé de fibre générique N_K, vérifiant la propriété de Néron d'extension des morphismes :*

pour tout S-schéma lisse *Y, la flèche de restriction*

$$\mathrm{Hom}_S(Y, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(Y_K, N_K)$$

est bijective.

Le schéma N ainsi défini est un modèle de Néron ltf de N_K sur S au sens de [BLR] 10.1/1 : il est localement de type fini sur S (car lisse sur S), mais il n'est pas de type fini sur S en général. Voir *loc. cit.* 10.2/2 pour des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un tel N lorsque N_K est un K-schéma *en groupes*.

En utilisant que le groupe abstrait des composantes géométriquement connexes de la fibre spéciale du modèle de Néron d'une variété semi-abélienne est *de type fini*, on parvient finalement à construire un espace de paramètres Λ/S convenable.

2.3 La situation universelle : la preuve

Commençons par un lemme concernant les rigidificateurs sur un corps.

Rappelons ([R] 2.1.1.) que si $Z \to T$ est un morphisme propre, plat et de présentation finie, et $Y \to T$ un morphisme fini, plat et de présentation finie, un T-morphisme $Y \to Z$ est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{Z/T}$ si, après tout changement de base $T' \to T$, l'application induite sur les sections globales $\Gamma(\mathcal{O}_{Z_{T'}}) \to \Gamma(\mathcal{O}_{Y_{T'}})$ est injective.

Lemme 2.10. *Soit X_K un schéma réduit propre sur un corps K. Soit x_K un sous-schéma de X_K, fini sur K, qui rencontre chaque composante connexe de X_K. Alors x_K est un rigidificateur de* $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$.

Démonstration. En effet, notons $\{X_{K,c}\}_{c\in C}$ l'ensemble des composantes connexes de X_K, et $x_{K,c}$ la restriction de x_K à $X_{K,c}$. Considérons la flèche de restriction

$$\Gamma(\mathcal{O}_{X_K}) = \prod_{c\in C} \Gamma(\mathcal{O}_{X_{K,c}}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{x_K}) = \prod_{c\in C} \Gamma(\mathcal{O}_{x_{K,c}}).$$

Comme X_K est réduit et les $x_{K,c}$ non vides, les morphismes d'anneaux

$$\Gamma(\mathcal{O}_{X_{K,c}}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{x_{K,c}})$$

ont pour source un corps et pour but un anneau non nul, donc sont injectifs. Le lemme résulte alors de [R] 2.2.2. □

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette sous-section 2.3, on se place sous les hypothèses du théorème 2.6. Donc T/S est une sous-extension de traits de S^{hs}/S, et X_K un K-schéma propre géométriquement normal. On note L/K l'extension générique de T/S, et on pose $P_K := \mathrm{Pic}_{X_K/K}$.

1) Paramétrage sur K des faisceaux inversibles algébriquement équivalents à zéro sur X_L. Fixons un sous-schéma fermé $x_K \hookrightarrow X_K$, dont la restriction à chaque composante connexe de X_K est un point fermé. Le foncteur de Picard rigidifié (P_K, x_K) est représentable par un K-schéma en groupes localement de type fini ([R] 2.3.1). Le morphisme d'oubli

$$(P_K, x_K) \longrightarrow P_K$$

est couvrant pour la topologie étale (*loc. cit.* 2.1.2 b)). De plus, comme le lieu lisse de X_K est ici un ouvert dense de X_K, on peut choisir x_K *étale sur* K. Dans ce cas, le noyau du morphisme d'oubli est un *tore* M_K (*loc. cit.* 2.4.3 b)). On a ainsi une suite exacte (de faisceaux abéliens pour la topologie étale)

$$0 \longrightarrow M_K \longrightarrow (P_K, x_K)^0 \longrightarrow P_K^0 \longrightarrow 0,$$

où ^{0} désigne les composantes neutres. L'hypothèse que X_K est géométriquement normal assure que le K-schéma P_K^0 est propre ([TDTE VI] 2.1 (ii)). En particulier, P_K^0, puis $(P_K, x_K)^0$, sont *sans composante additive* : notant $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, les $\overline{K}$-schémas en groupes réduits $P^0_{\overline{K},\mathrm{red}}$ et $(P_{\overline{K}}, x_{\overline{K}})^0_{\mathrm{red}}$ sont de rang unipotent nul. Il résulte donc de *loc. cit.* 3.1 que les K-schémas réduits $P^0_{K,\mathrm{red}}$ et $(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}$ sont des K-schémas *en groupes*, commutatifs, lisses et connexes. On en déduit en particulier un homomorphisme

$$(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}} \longrightarrow P^0_{K,\mathrm{red}}$$

de noyau M_K, et $(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}$ est ainsi extension d'une variété abélienne par un tore. D'après [BLR] 10.2/2, le K-schéma en groupes $(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}$ possède donc un modèle de Néron N_0 sur S (définition 2.9).

Soit Φ_{N_0} le k-schéma en groupes étale des composantes connexes de la fibre spéciale de N_0. Notant l le corps résiduel de T, l'image de la spécialisation

$$N_0(T) \longrightarrow \Phi_{N_0}(l)$$

est un sous-groupe de $\Phi_{N_0}(l)$. Il est donc de type fini (cf. par exemple [BX] 4.11 (i)), et on peut en choisir un système fini de générateurs Γ. On en fixe un relèvement $\{\lambda^\gamma_{L,0} \in (P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}(L) \mid \gamma \in \Gamma\}$. Puis pour tout $\gamma \in \Gamma$, on note N_0^γ la réunion de la fibre générique de N_0 et de la composante connexe de la fibre spéciale de N_0 dans laquelle se spécialise $\lambda^\gamma_{L,0}$. On note aussi N_0^0 la composante neutre de N_0. La réunion

$$\Lambda_0 := N_0^0 \bigcup_{\gamma\in\Gamma} N_0^\gamma$$

est alors un ouvert de N_0, de fibre générique $(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}$.

Maintenant, l'objet universel pour (P_K, x_K) est représenté par un couple $(\mathcal{P}_K, t)$, formé d'un faisceau inversible $\mathcal{P}_K$ sur $X_K \times_K (P_K, x_K)$ et d'une trivialisation t de $\mathcal{P}_K$ le long du rigidificateur $x_K \times_K (P_K, x_K)$. D'autre part, comme le schéma X est de type fini sur un trait, son lieu de régularité X^{reg} est un ouvert de X ([EGA IV]

6.12.6 (ii)). Et Λ_0 étant lisse sur S, l'ouvert $X^{\mathrm{reg}} \times_S \Lambda_0$ de $X \times_S \Lambda_0$ est régulier. On peut donc prolonger le faisceau inversible

$$\mathcal{P}_K\,|_{X_K \times_K (P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}}$$

en un faisceau inversible sur $X_K \times_K (\Lambda_0)_K \cup X^{\mathrm{reg}} \times_S \Lambda_0$. Puis on peut prolonger le faisceau obtenu en un module *cohérent* $\mathcal{M}_0$ sur $X \times_S \Lambda_0$ ([EGA I] 9.4.8).

2) Paramétrage sur K du groupe de Néron-Severi de X_L. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Le groupe de Néron-Severi géométrique de X_K

$$\mathrm{NS}_g := P_K(\overline{K})/P^0_K(\overline{K})$$

est de type fini ([SGA 6] XIII 5.1). Comme M_K est géométriquement connexe, le groupe NS_g coïncide avec le « groupe de Néron-Severi géométrique rigidifié » de X_K :

$$\mathrm{NS}_{g,r} := (P_K, x_K)(\overline{K})/(P_K, x_K)^0(\overline{K}).$$

En particulier, le « groupe de Néron-Severi rigidifié » de X_L

$$\mathrm{NS}_{r,L} := (P_K, x_K)(L)/(P_K, x_K)^0(L)$$

est de type fini. Il existe donc un ensemble fini d'indices I et des points

$$\{\lambda_{L,i} \in (P_K, x_K)(L) \mid i \in I\}$$

tels que $\mathrm{NS}_{r,L}$ soit engendré par les classes des $\lambda_{L,i}$.

Par hypothèse, l'extension T/S est une sous-extension d'une hensélisation stricte S^{hs}/S. Le trait T est donc limite projective filtrante de traits S_α étales sur S. Notant K_α le corps de fonctions de S_α, le corps L est alors limite inductive filtrante des K_α. Il existe donc α tel que pour tout $i \in I$, l'élément $\lambda_{L,i} \in (P_K, x_K)(L)$ provienne d'un élément $\lambda_{K_\alpha,i} \in (P_K, x_K)(K_\alpha)$. Pour $i \in I$, posons

$$\mathcal{L}_{K_\alpha,i} := (1 \times_K \lambda_{K_\alpha,i})^* \mathcal{P}_K,$$

faisceau inversible sur $X_K \times_K K_\alpha$. Prolongeons-le en un faisceau inversible sur $X_K \times_K K_\alpha \cup X^{\mathrm{reg}} \times_S S_\alpha$. Puis choisissons un prolongement cohérent $\mathcal{M}_{\alpha,i}$ de celui-ci sur $X \times_S S_\alpha$.

3) Modification de X en dehors de X_K. Considérons l'union disjointe de Λ_0 et de copies $S_{\alpha,i}$ de S_α indexées par I :

$$\Lambda := \Lambda_0 \coprod_{i\in I} S_{\alpha,i}.$$

C'est un S-schéma lisse de type fini. La première projection $p_1 : X \times_S \Lambda \to X$ est donc un morphisme lisse de type fini. De plus, on a construit un module cohérent $\mathcal{M}$ sur $X \times_S \Lambda$, égal à $\mathcal{M}_0$ sur $X \times_S \Lambda_0$ et à $\mathcal{M}_{\alpha,i}$ sur $X \times_S S_{\alpha,i}$. Il est inversible sur $p_1^{-1}(X_K \cup X^{\mathrm{reg}})$.

Appliquons le théorème 2.1 au morphisme p_1 et au module $\mathcal{M}$, avec l'ouvert schématiquement dense $X_K \cup X^{\mathrm{reg}}$ de X. On trouve un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \times_S \Lambda \arrow[d, "p_1"] & X' \times_S \Lambda \arrow[l] \arrow[d, "p_1"] \\ X & X' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $X' \to X$ est un éclatement $(X_K \cup X^{\mathrm{reg}})$-admissible, et un $\mathcal{O}_{X' \times_S \Lambda}$-module *inversible* $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui prolonge $\mathcal{M}\,|_{p_1^{-1}(X_K \cup X^{\mathrm{reg}})}$. Le modèle X'/S de X_K ainsi obtenu est encore propre, et plat puisque X_K est schématiquement dense dans X'.

4) Le schéma $(X')_T$ est semi-factoriel sur T. Soit $\mathcal{L}_L$ un faisceau inversible sur X_L. Il s'agit de voir qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}_T$ sur $X' \times_S T$ tel que $\mathcal{L}_T \otimes L$ soit isomorphe à $\mathcal{L}_L$.

On peut toujours rigidifier $\mathcal{L}_L$ le long du schéma artinien $x_K \otimes_K L$ pour obtenir un point $\lambda_L \in (P_K, x_K)(L)$. D'après l'étape **2)**, il existe $\{n_i \in \mathbb{Z} \mid i \in I\}$ et $\lambda_{L,0} \in (P_K, x_K)^0(L)$ tels que

$$\lambda_L = \sum_{i \in I} n_i \cdot \lambda_{L,i} + \lambda_{L,0}.$$

Or $(P_K, x_K)^0(L) = (P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}(L)$. D'après l'étape **1)**, il existe donc $\{m_\gamma \in \mathbb{Z} \mid \gamma \in \Gamma\}$ et $\lambda^0_{L,0} \in (P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}(L)$ se prolongeant dans $N^0_0(T)$ tels que

$$\lambda_{L,0} = \sum_{\gamma \in \Gamma_l} m_\gamma \cdot \lambda^\gamma_{L,0} + \lambda^0_{L,0}.$$

Utilisons maintenant l'étape **3)**. Par définition de $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$, il existe pour tout $\gamma \in \Gamma$ un élément $\lambda^\gamma_0 \in \Lambda(T)$ prolongeant $\lambda^\gamma_{L,0}$ et un élément $\lambda^0_0 \in \Lambda(T)$ prolongeant $\lambda^0_{L,0}$. Le faisceau inversible

$$\mathcal{L}_{T,0} := \otimes_{\gamma \in \Gamma} \big((1 \times_S \lambda^\gamma_0)^* \widetilde{\mathcal{M}}\big)^{\otimes m_\gamma} \otimes (1 \times_S \lambda^0_0)^* \widetilde{\mathcal{M}}$$

prolonge $(1 \times_K \lambda_{L,0})^* \mathcal{P}_K$ sur $X' \times_S T$. Par définition de Λ, il existe pour tout $i \in I$ un élément $\lambda_i \in \Lambda(T)$ tel que $(1 \times_S \lambda_i)^* \widetilde{\mathcal{M}}$ prolonge $(1 \times_K \lambda_{L,i})^* \mathcal{P}_K$ sur $X' \times_S T$. Le faisceau inversible

$$\mathcal{L}_T := \otimes_{i \in I} \big((1 \times_S \lambda_i)^* \widetilde{\mathcal{M}}\big)^{\otimes n_i} \otimes \mathcal{L}_{T,0}$$

prolonge $(1 \times_K \lambda_L)^* \mathcal{P}_K \simeq \mathcal{L}_L$ sur $X' \times_S T$.

5) Normalisation de X'. Pour achever la preuve du théorème 2.6, il ne reste plus qu'à montrer que le morphisme de normalisation $\widetilde{X} := (X')^{\mathrm{nor}} \to X'$ est fini.

Lemme 2.11. *Soit X un schéma de type fini et plat sur un trait S. Supposons la fibre générique de X/S géométriquement normale (en particulier X est réduit). Alors le morphisme de normalisation $X^{\mathrm{nor}} \to X$ est fini.*

Démonstration. Soit $\widehat{S}$ le spectre du complété de l'anneau local $\Gamma(\mathcal{O}_S)$ par rapport à son idéal maximal. Comme $\widehat{S}$ est un trait excellent, le morphisme de normalisation $(X_{\widehat{S}})^{\mathrm{nor}} \to X_{\widehat{S}}$ est fini. Par descente fpqc pour les morphismes finis ([EGA IV] 2.7.1), il suffit donc de montrer que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X_{\widehat{S}})^{\mathrm{nor}} & \longrightarrow & X_{\widehat{S}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{nor}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. Pour cela, on peut supposer X intègre et affine.

Notons X_K (resp. $X_{\widehat{K}}$) la fibre générique de X/S (resp. $X_{\widehat{S}}/\widehat{S}$). Ces fibres sont normales par hypothèse. La fermeture intégrale X^{nor} de X (resp. $(X_{\widehat{S}})^{\mathrm{nor}}$ de $X_{\widehat{S}}$) relativement à son algèbre des fonctions rationnelles coïncide donc avec sa fermeture intégrale relativement à $\mathcal{O}_{X_K}$ (resp. $\mathcal{O}_{X_{\widehat{K}}}$). De plus, notant k le corps résiduel de S, la projection $X_{\widehat{S}} \to X$ induit un isomorphisme

$$X_k \times_S \widehat{S} \longrightarrow X_k.$$

Comme de plus X_K est quasi-compact (et $X_k \to X$ de présentation finie), on peut appliquer le résultat de descente de [FR] 4.3, pour obtenir que le diagramme ci-dessus est cartésien. $\square$

2.4 Changement de trait

Du théorème 2.6, on déduit le

Corollaire 2.12. *Soit $S^{\mathrm{hs}} \to S$ une hensélisation stricte d'un trait S. Soient n un entier ≥ 1, et T_i/S, $i = 1, \ldots, n$, des sous-extensions de traits de S^{hs}/S. Soit X_K un K-schéma propre géométriquement normal.*

Pour tout modèle propre et plat X/S de X_K, il existe un morphisme $\widetilde{X} \to X$, composé d'un éclatement centré dans la fibre fermée de X/S suivi de sa normalisation, tel que $\widetilde{X}/S$ soit un modèle propre et plat de X_K sur S, normal et semi-factoriel après chacun des changements de trait $T_i \to S$.

Démonstration. D'après le théorème 2.6, il existe un éclatement $f_1 : X_1' \to X$ centré dans la fibre fermée de X/S, tel que $(X_1')_{T_1}$ soit semi-factoriel sur T_1. Appliquant à nouveau le théorème 2.6, cette fois au modèle propre et plat X_1'/S de X_K, et avec le trait T_2, on obtient un éclatement $f_2 : X_2' \to X_1'$ centré dans la fibre fermée de X_1'/S, tel que $(X_2')_{T_2}$ soit semi-factoriel sur T_2. Le schéma $(X_2')_{T_1}$ est encore semi-factoriel sur T_1 : identifiant les fibres génériques de $(X_2')_{T_1}$ et $(X_1')_{T_1}$ au moyen de $(f_2)_{T_1}$, un faisceau inversible $\mathcal{L}_{K_1}$ sur la fibre générique de $(X_2')_{T_1}$ peut se prolonger en un faisceau inversible $\mathcal{L}_1$ sur $(X_1')_{T_1}$, et $((f_2)_{T_1})^* \mathcal{L}_1$ prolonge alors $\mathcal{L}_{K_1}$ sur $(X_2')_{T_1}$. Par ailleurs, le composé $X_2' \to X_1' \to X$ est un éclatement centré dans la fibre fermée de X/S ([RG] 5.1.4).

On construit ainsi, de proche en proche, un éclatement $X_n' \to X$ centré dans la fibre fermée de X/S, tel que X_n'/S soit un modèle propre et plat de X_K, semi-factoriel après chaque extension T_i/S. En composant avec la normalisation $(X_n')^{\mathrm{nor}} \to X_n'$, on obtient un morphisme $\widetilde{X} := (X_n')^{\mathrm{nor}} \to X$ convenable (lemme 2.11). □

On obtient ainsi des modèles semi-factoriels sur S qui commutent à certaines extensions de traits *prescrites* et *en nombre fini*. Nous allons voir que l'on peut construire des modèles semi-factoriels sur S qui commutent à une certaine *classe* d'extensions de traits.

Définition 2.13. *Soit $T \to S$ un morphisme de traits. On dira que $T \to S$ est* permis *si le trait T est strictement hensélien et si le morphisme $T \to S$ est surjectif régulier.*

Notant K, L les corps de fonctions de S, T, et k, l leurs corps résiduels, le morphisme $T \to S$ est surjectif régulier si et seulement si il est plat, le morphisme induit $\Gamma(\mathcal{O}_S) \to \Gamma(\mathcal{O}_T)$ envoie uniformisante sur uniformisante et les deux extensions L/K et l/k sont séparables (non nécessairement algébriques) ([EGA IV] 6.8.1 et 6.7.6). Par exemple, si S est excellent et k séparablement clos, le spectre $\widehat{S}$ du complété de $\Gamma(\mathcal{O}_S)$ par rapport à son idéal maximal définit une extension permise $\widehat{S} \to S$.

Remarque 2.14. Soit S^{hs} un hensélisé strict de S. Une extension permise de traits $T \to S$ se décompose en deux extensions permises $T \to S^{\mathrm{hs}}$ et $S^{\mathrm{hs}} \to S$. En effet, comme T est strictement hensélien, l'extension $T \to S$ se factorise par $S^{\mathrm{hs}} \to S$. Puis, les extensions générique et résiduelle de S^{hs}/S étant algébriques, il résulte de [B A] Chap. 5, §15, n°4, Corollaire 3, que l'extension $T \to S^{\mathrm{hs}}$ est permise.

Remarque 2.15. Si $T \to S$ est une extension permise de traits, elle est en particulier *d'indice de ramification* 1 au sens de [BLR] 3.6/1. On demande en plus ici que l'extension des corps de fonctions soit séparable, et que T soit strictement hensélien.

Remarque 2.16. Si $T \to S$ est une extension surjective régulière de traits, alors pour tout schéma *normal* (resp. *régulier*) X localement de type fini sur S, le schéma $X_T := X \times_S T$ est encore *normal* (resp. *régulier*). Cela résulte de [EGA IV] 6.5.4 (ii) et 6.7.4.1 (resp. 6.5.2 (ii) et 6.7.4.1).

Théorème 2.17. *Soient S un trait de corps de fonctions K et X_K un K-schéma propre géométriquement normal.*

Pour tout modèle propre et plat X/S de X_K, il existe un morphisme $\widetilde{X} \to X$, composé d'un éclatement centré dans la fibre fermée de X/S suivi de sa normalisation, tel que $\widetilde{X}/S$ soit un modèle propre et plat de X_K, normal et semi-factoriel sur S et après toute extension permise de traits $T \to S$.

Le point-clé est le suivant : lorsque l'on prend $T = S^{\mathrm{hs}}$ dans l'énoncé du théorème 2.6, la construction de la sous-section 2.3 fournit un éclatement $X' \to X$ tel que X' soit semi-factoriel après l'extension S^{hs}/S, *mais aussi après toute extension permise* T/S. Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

Lemme 2.18. *Soient $T \to S$ une extension de traits d'indice de ramification* 1 *([BLR] 3.6/1), et S^{hs} un hensélisé strict de S. On note L/K l'extension générique de $T \to S$, et K^{hs} le corps de fonctions de S^{hs}. Soit Z_K un K-schéma de type fini, dont le réduit $Z_{K,\mathrm{red}}$ est lisse sur K. Alors, si l'ensemble $Z_K(L)$ est non vide, l'ensemble $Z_K(K^{\mathrm{hs}})$ l'est aussi.*

Démonstration. Choisissons $\lambda_L \in Z_K(L) = (Z_{K,\mathrm{red}})(L)$. En chassant les dénominateurs, on peut toujours trouver un S-schéma affine de type fini U dont la fibre générique est un voisinage ouvert de l'image de λ_L dans $Z_{K,\mathrm{red}}$, et tel que λ_L se prolonge en un élément $\lambda \in U(T)$. En particulier, la fibre fermée de U/S est non vide. Comme U_K est lisse sur K, et T/S d'indice de ramification 1, il existe donc un S-morphisme $U' \to U$ composé d'un nombre fini de dilatations centrées dans les fibres fermées, tel que λ se relève dans le lieu lisse de U'/S ([BLR] 3.6/4). Mais alors $U'(S^{\mathrm{hs}})$ est nécessairement non vide, et *a fortiori* $Z_K(K^{\mathrm{hs}}) = (Z_{K,\mathrm{red}})(K^{\mathrm{hs}})$ est non vide. □

Lemme 2.19. *Soit L/K une extension séparable de corps. Soit G_K un K-schéma en groupes localement de type fini, dont la composante neutre réduite $G^0_{K,\mathrm{red}}$ est lisse sur K. Soit Z_K une composante connexe de G_K. Alors, si l'ensemble $Z_K(L)$ est non vide, le réduit $Z_{K,\mathrm{red}}$ est lisse sur K.*

Démonstration. Comme l'extension L/K est séparable, on a $(Z_{K,\mathrm{red}})_L = Z_{L,\mathrm{red}}$ ([EGA IV] 4.6.4). Supposons $Z_K(L)$ non vide. Il existe alors une composante connexe Z^0_L de Z_L qui est un torseur trivial sous G^0_L. En particulier, le réduit $Z^0_{L,\mathrm{red}}$ est L-isomorphe au réduit $G^0_{L,\mathrm{red}} = (G^0_{K,\mathrm{red}})_L$, donc est lisse sur L. Comme $Z^0_{L,\mathrm{red}}$ est une composante connexe de $(Z_{K,\mathrm{red}})_L$, la projection de ce dernier sur $Z_{K,\mathrm{red}}$ induit un morphisme

$$Z^0_{L,\mathrm{red}} \longrightarrow Z_{K,\mathrm{red}}.$$

Ce morphisme est plat, et surjectif : la composante connexe $Z^0_{L,\mathrm{red}}$ est définie sur une sous-extension finie de L/K (appliquer [EGA IV] 4.9.7 en notant que $Z_{K,\mathrm{red}}$ est de type fini sur K), donc son image dans $Z_{K,\mathrm{red}}$ est à la fois ouverte et fermée. En conclusion, le schéma $Z_{K,\mathrm{red}}$ est lisse sur K ([EGA IV] 17.7.1 (ii)). □

Démonstration du théorème 2.17. Conservons les constructions des étapes **1)**, **2)** et **3)** de la sous-section 2.3 dans le cas $T = S^{\mathrm{hs}}$. D'après l'étape **4)**, on sait déjà que le modèle X' obtenu est semi-factoriel après l'extension S^{hs}/S. Soit maintenant T/S une extension permise de traits quelconque. Notons L le corps de fonctions de T, et fixons une factorisation $T \to S^{\mathrm{hs}} \to S$, induisant des plongements $K \subseteq K^{\mathrm{hs}} \subseteq L$ (remarque 2.14). Considérons un faisceau inversible $\mathcal{L}_L$ sur X_L et montrons qu'il se prolonge en un faisceau inversible sur $X' \times_S T$.

Rigidifions $\mathcal{L}_L$ le long de $x_K \otimes_K L$ pour obtenir un point $\lambda_L \in (P_K, x_K)(L) = (P_K, x_K)_{K^{\mathrm{hs}}}(L)$. Soit $Z_{K^{\mathrm{hs}}}$ la composante connexe de $(P_K, x_K)_{K^{\mathrm{hs}}}$ telle que $\lambda_L \in Z_{K^{\mathrm{hs}}}(L)$. D'après le lemme 2.19 appliqué à l'extension séparable L/K^{hs}, le réduit

$Z_{K^{\mathrm{hs}},\mathrm{red}}$ est lisse sur K^{hs}. Puis, d'après le lemme 2.18 appliqué à l'extension d'indice de ramification 1 $T \to S^{\mathrm{hs}}$, il existe $\lambda_{K^{\mathrm{hs}}} \in Z_{K^{\mathrm{hs}}}(K^{\mathrm{hs}}) \subseteq (P_K, x_K)(K^{\mathrm{hs}})$. La différence $\delta_L := \lambda_L - \lambda_{K^{\mathrm{hs}}}$ dans le groupe $(P_K, x_K)(L)$ appartient au sous-groupe $(P_K, x_K)^0(L)$. En effet, comme $Z_{K^{\mathrm{hs}}}(K^{\mathrm{hs}})$ est non vide, la composante connexe $Z_{K^{\mathrm{hs}}}$ de $(P_K, x_K)_{K^{\mathrm{hs}}}$ est *géométriquement* connexe. Il en résulte que $\lambda_{K^{\mathrm{hs}}}$ et λ_L, vus comme L-points de $(P_K, x_K)_L$, sont dans la même composante connexe de $(P_K, x_K)_L$, à savoir Z_L. On a donc bien $\delta_L \in (P_K, x_K)^0_L(L) = (P_K, x_K)^0(L)$.

Maintenant, le faisceau inversible $(1 \times_K \delta_L)^* \mathcal{P}_K$ sur X_L se prolonge en un faisceau inversible sur $X' \times_S T$. En effet, l'extension T/S étant permise, elle est d'indice de ramification 1 au sens de [BLR] 3.6/1. D'après *loc. cit.* 7.2/1, le modèle de Néron N_0 de $(P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}$ commute donc à l'extension T/S. Par conséquent, d'après l'étape **1)** de la sous-section 2.3 appliquée au cas de S^{hs}, il existe $\{d_\gamma \in \mathbb{Z} \mid \gamma \in \Gamma\}$ et $\delta^0_L \in (P_K, x_K)^0_{\mathrm{red}}(L)$ se prolongeant en $\delta^0_T \in N^0_0(T)$ tels que

$$\delta_L = \sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma \cdot \lambda^\gamma_{K^{\mathrm{hs}},0} + \delta^0_L$$

(rappelons que, par définition, les $\lambda^\gamma_{K^{\mathrm{hs}},0}$ engendrent l'image de $N_0(K^{\mathrm{hs}})$ dans le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de N_0). Le faisceau inversible

$$\mathcal{L}_{T,\delta} := \otimes_{\gamma \in \Gamma} \big((1 \times_S \lambda^\gamma_0)^* \widetilde{\mathcal{M}} \otimes_{S^{\mathrm{hs}}} T\big)^{\otimes d_\gamma} \otimes (1 \times_S \delta^0_T)^* \widetilde{\mathcal{M}}$$

prolonge alors $(1 \times_K \delta_L)^* \mathcal{P}_K$ sur $X' \times_S T$.

Par ailleurs, comme $(X')_{S^{\mathrm{hs}}}$ est semi-factoriel sur S^{hs}, il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}_{S^{\mathrm{hs}}}$ qui prolonge $(1 \times_K \lambda_{K^{\mathrm{hs}}})^* \mathcal{P}_K$ sur $(X')_{S^{\mathrm{hs}}}$. Finalement, le faisceau inversible

$$\mathcal{L}_T := (\mathcal{L}_{S^{\mathrm{hs}}} \otimes_{S^{\mathrm{hs}}} T) \otimes \mathcal{L}_{T,\delta}$$

prolonge $\big((1 \times_K \lambda_{K^{\mathrm{hs}}})^* \mathcal{P}_K \otimes_{K^{\mathrm{hs}}} L\big) \otimes (1 \times_K \delta_L)^* \mathcal{P}_K \simeq (1 \times_K \lambda_L)^* \mathcal{P}_K \simeq \mathcal{L}_L$ sur $X' \times_S T$.

On a ainsi prouvé que le schéma $(X')_T$ est semi-factoriel sur T pour toute extension permise T/S. Quitte à éclater X'/S le long d'un sous-schéma fermé de sa fibre spéciale, on peut supposer que X' est aussi semi-factoriel sur S (théorème 2.6). Comme le morphisme de normalisation $\widetilde{X} \to X'$ est propre (lemme 2.11), on obtient un morphisme $\widetilde{X} \to X$ comme dans l'énoncé du théorème. □

2.5 Compactifications semi-factorielles d'un schéma régulier

Définition 2.20. *Soit S un trait de corps de fonctions K. Soit X un S-schéma de type fini séparé. Une S-*compactification* de X est une S-immersion ouverte de X dans un S-schéma propre, dont l'image est dense.*

Soit $\iota : X \to \overline{X}$ une S-immersion ouverte de S-schémas, avec $\overline{X}/S$ propre. Si ι est une S-compactification de X, et si X_K est propre sur K, alors ι induit un isomorphisme $\iota_K : X_K \to \overline{X}_K$. Inversement, si $\overline{X}/S$ est plat, et si $\iota_K : X_K \to \overline{X}_K$ est un isomorphisme, alors ι est une S-compactification de X.

Théorème 2.21. *Soient $S^{\mathrm{hs}} \to T \to S$ des extensions de traits, telles que la composée $S^{\mathrm{hs}} \to S$ soit une hensélisation stricte de S. Soit X un S-schéma de type fini, séparé et plat, dont la fibre générique X_K est un K-schéma propre géométriquement normal. On suppose que le lieu singulier de X est contenu dans X_K (par exemple X régulier).*

Il existe une S-compactification $X \to \overline{X}$ de X, avec $\overline{X}$ plat sur S, normal et tel que la flèche de restriction $\mathrm{Pic}(\overline{X}_T) \to \mathrm{Pic}(X_T)$ soit surjective. *(En particulier, le schéma $\overline{X}_T$ est normal et semi-factoriel sur T.)*

Démonstration. D'après la version relative du théorème de compactification de Nagata, il existe un S-schéma propre X_1 et une S-immersion ouverte $X \to X_1$. Quitte à remplacer X_1 par l'adhérence schématique de X dans X_1, on peut supposer que $X \to X_1$ est une S-compactification de X (définition 2.20) et que X_1 est plat sur S. En appliquant le théorème 2.6 *et* la remarque 2.7, on trouve un éclatement X-admissible $(X_1)' \to X_1$ tel que $((X_1)')_T$ soit semi-factoriel sur T. Quitte à remplacer X_1 par $(X_1)'$, on peut donc supposer $(X_1)_T/T$ semi-factoriel.

Considérons maintenant les composantes irréductibles réduites V_j, $j = 1, \dots, \nu$, de la fibre spéciale de X_T/T. Le trait T est limite projective filtrante de traits S_α étales sur S. Son corps résiduel l est donc limite inductive filtrante des corps résiduels k_α des S_α. Les V_j proviennent donc des composantes irréductibles réduites $V_{k_\alpha,j}$ de X_{k_α} pour un certain α. Comme X_{S_α} est régulier le long de sa fibre spéciale, l'idéal cohérent $\mathcal{V}_{k_\alpha,j}$ sur X_{S_α} définissant $V_{k_\alpha,j} \hookrightarrow X_{S_\alpha}$ est inversible. Son image réciproque $\mathcal{V}_j := \mathcal{V}_{k_\alpha,j} \otimes_{S_\alpha} T$ définit V_j dans X_T.

Prolongeons $\mathcal{V}_{k_\alpha,1}$ en un module cohérent $\mathcal{M}_1$ sur $X_1 \times_S S_\alpha$. Puis appliquons le théorème 2.1 à la première projection $X_1 \times_S S_\alpha \to X_1$ et au module $\mathcal{M}_1$, avec l'ouvert schématiquement dense X de X_1. On obtient un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_S S_\alpha \arrow[d, "p_1"] & X_2 \times_S S_\alpha \arrow[l] \arrow[d, "p_1"] \\ X_1 & X_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $X_2 \to X_1$ est un éclatement X-admissible, et un module inversible $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ sur $X_2 \times_S S_\alpha$ qui prolonge $\mathcal{V}_{k_\alpha,1}$. L'immersion ouverte composée $X \to X_2$ est une S-compactification de X, et X_2 est plat sur S. En procédant de même avec un prolongement cohérent de $\mathcal{V}_{k_\alpha,2}$ sur $X_2 \times_S S_\alpha$, etc, on obtient finalement une S-compactification $X \to X_\nu =: X'$, avec X' plat sur S, semi-factoriel sur T, et tel que tous les $\mathcal{V}_{k_\alpha,j}$ se prolongent en des faisceaux inversibles sur $X' \times_S S_\alpha$. *A fortiori*, les $\mathcal{V}_j$ se prolongent en des faisceaux inversibles sur $(X')_T$.

L'homomorphisme de restriction $\mathrm{Pic}((X')_T) \to \mathrm{Pic}(X_T)$ est surjectif. En effet, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X_T. Comme $(X')_T/T$ est semi-factoriel, le faisceau $\mathcal{L}_L := \mathcal{L} \otimes L$ se prolonge en un faisceau inversible $\mathcal{L}'$ sur $(X')_T$. Sur l'ouvert normal X_T, le faisceau inversible $\mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}' |_{X_T})^{-1}$ est alors trivial en restriction à X_L, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à un produit de puissances des $\mathcal{V}_j$, $j = 1, \dots, \nu$. Mais comme ceux-ci se prolongent de façon inversible sur $(X')_T$, il en va finalement de même pour $\mathcal{L}$.

En conclusion, en notant $\overline{X}$ le normalisé de X', on obtient une X_K-compactification $X \to \overline{X}$ ayant les propriétés requises. □

Concernant les changements de traits, on a les résultats analogues à ceux de la section précédente.

Corollaire 2.22. *Soit $S^{\mathrm{hs}} \to S$ une hensélisation stricte d'un trait S. Soient n un entier ≥ 1, et T_i/S, $i = 1, \dots, n$, des sous-extensions de traits de S^{hs}/S. Soit X un S-schéma de type fini, séparé et plat, dont la fibre générique X_K est un K-schéma propre géométriquement normal. On suppose que le lieu singulier de X est contenu dans X_K (par exemple X régulier).*

Il existe une S-compactification $X \to \overline{X}$ de X, avec $\overline{X}$ plat sur S, normal *et tel que* la flèche de restriction $\mathrm{Pic}(\overline{X}_T) \to \mathrm{Pic}(X_T)$ soit surjective pour $T = T_i$, $i = 1, \dots, n$, et pour T/S extension permise arbitraire.

Démonstration. Soit X'/S une S-compactification de X, plate sur S. Quitte à modifier X' par un éclatement X-admissible, on peut supposer que pour toute extension permise T/S, induisant une extension générique L/K, la flèche de restriction à la fibre générique

$$\mathrm{Pic}((X')_T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_L)$$

est surjective (théorème 2.17 et remarque 2.7).

Soient $\mathcal{V}_{k_s,j}$, $j = 1,\ldots,\nu$, les idéaux inversibles sur $X_{S^{\mathrm{hs}}}$ définissant les composantes irréductibles réduites de la fibre spéciale de $X_{S^{\mathrm{hs}}}/S^{\mathrm{hs}}$. Après un nouvel éclatement X-admissible de X', on peut supposer que les $\mathcal{V}_{k_s,j}$ se prolongent en des faisceaux inversibles sur $(X')_{S^{\mathrm{hs}}}$ (théorème 2.21 appliqué à S^{hs}/S).

Alors, pour toute extension permise T/S, la flèche de restriction à X_T

$$\mathrm{Pic}((X')_T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_T)$$

est surjective. En effet, fixons une factorisation $T \to S^{\mathrm{hs}} \to S$ de T/S. Comme le corps résiduel de S^{hs} est séparablement clos, les composantes irréductibles réduites de la fibre spéciale de X_T/T sont définies par des idéaux inversibles provenant des $\mathcal{V}_{k_s,j}$ par le changement de base T/S^{hs}. Ils se prolongent donc en des faisceaux inversibles sur $(X')_T$. Comme $(X')_T$ est déjà semi-factoriel, et X_T est normal (remarque 2.16), l'homomorphisme de restriction ci-dessus est bien surjectif.

Ceci étant, après n éclatements X-admissibles, on peut en outre assurer que les restrictions

$$\mathrm{Pic}((X')_{T_i}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{T_i})$$

soient surjectives pour $i = 1,\ldots,n$ (théorème 2.21 appliqué à T_i/S). Le normalisé $\overline{X}$ de X' est alors une S-compactification convenable de X. $\square$

Le corollaire 2.22 s'applique par exemple pour obtenir des *compactifications semi-factorielles du modèle de Néron d'une variété abélienne*. Plus généralement, rappelons que si S est un trait de corps de fonctions K, un torseur fppf X_K sous une variété abélienne A_K est dit *non ramifié* si, notant K^{hs} le corps de fonctions d'un hensélisé strict de S, l'ensemble $X_K(K^{\mathrm{hs}})$ est non vide.

Corollaire 2.23. *Soit S un trait de corps de fonctions K. Soient A_K une variété abélienne, et X_K un torseur* fppf *non ramifié sous A_K. Soit X le modèle de Néron de X_K sur S.*

Il existe une S-compactification $X \to \overline{X}$ de X, avec $\overline{X}$ projectif et plat sur S, normal, tel que la flèche de restriction $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(X)$ soit surjective, et le soit encore après toute extension permise T/S (définition 2.13).

Si on se prescrit un nombre fini d'extensions de traits T_i/S, sous-extensions d'une hensélisation stricte S^{hs}/S, on peut en outre demander que la restriction $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{T_i}) \to \mathrm{Pic}(X_{T_i})$ *soit surjective pour tout i.*

Démonstration. Le schéma X_K possède bien un modèle de Néron X sur S d'après [BLR] 6.5/4. Celui-ci est quasi-projectif sur S (*loc. cit.* 6.4/1). On peut donc trouver une S-compactification $X \to X'$, avec X' *projectif* et plat sur S. La démonstration du corollaire 2.22 fournit alors une S-compactification $X \to \overline{X}$ convenable. $\square$

L'intérêt de telles compactifications est d'exister *sans aucune hypothèse sur la réduction de la variété abélienne A_K*. Bien entendu, lorsque A_K a réduction semi-stable sur S, on dispose de compactifications bien meilleures de son modèle de Néron A/S : en s'appuyant sur la théorie de la dégénérescence des variétés abéliennes de Mumford-Faltings-Chaï, Künnemann a construit une compactification régulière canonique de A/S (cf. [Kü]).

2.6 Une variante globale de la semi-factorialité

Théorème 2.24. *Soit S un schéma noethérien intègre normal de dimension 1, de corps de fonctions K. Soient n un entier ≥ 1, et T_i/S, $i = 1, \dots, n$, des S-schémas étales de type fini, avec T_i intègre de corps de fonctions L_i. Soit X un S-schéma propre et plat. On suppose que la fibre générique X_K de X/S est lisse sur K.*

Il existe un S-schéma $\widetilde{X}$ isomorphe à X au-dessus d'un ouvert non vide de S, ayant les propriétés suivantes : $\widetilde{X}/S$ est propre et plat, $\widetilde{X}$ est normal, *et* la flèche de restriction $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{T_i}) \to \mathrm{Pic}(X_{L_i})$ est surjective pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. Comme X_K est lisse, il existe un ensemble fini $F = \{s_1, \dots, s_m\}$ de points fermés de S tel que $X_U := X \times_S U$ soit lisse sur l'ouvert $U := S - F$ de S. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$. D'après le corollaire 2.12, il existe un modèle propre plat normal $X_{(s_j)}$ de X_K sur $\mathcal{O}_{S,s_j}$, tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, et pour tout point t_{i_j} de T_i au-dessus de s_j, le schéma $X_{(s_j)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s_j}} \mathcal{O}_{T_i,t_{i_j}}$ soit semi-factoriel sur $\mathcal{O}_{T_i,t_{i_j}}$. Chacun des $X_{(s_j)}$, $j = 1, \dots, m$, peut être étendu en un schéma X_j de type fini au-dessus d'un voisinage ouvert S_j de s_j dans S ([EGA IV] 8.8.2). Quitte à diminuer S_j autour de s_j, on peut supposer X_j/S_j propre (*loc. cit.* 8.10.5 (xii)), puis plat. On peut même supposer $S_j \cap F = \{s_j\}$ et $X_j = X$ au-dessus de $S_j \cap U$. Chaque X_j peut alors être recollé à X_U au-dessus de $S_j \cap U$, pour obtenir un schéma $\widetilde{X}$ propre et plat sur S, lisse au-dessus de U, et normal.

Montrons que la restriction $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{T_i}) \to \mathrm{Pic}(X_{L_i})$ est surjective pour tout $i = 1, \dots, n$. Comme la formation de $\widetilde{X}$ commute au changement de base $T_i \to S$, on peut supposer $T_i = S$, et il faut alors montrer que $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \to \mathrm{Pic}(X_K)$ est surjective. Soit $\mathcal{L}_K$ un faisceau inversible sur X_K. Comme X_K est réduit, on peut supposer que $\mathcal{L}_K$ est le faisceau défini par un diviseur D_K sur X_K. On notera H le cycle 1-codimensionnel sur $\widetilde{X}$, obtenu en prenant l'adhérence schématique du cycle $\mathrm{cyc}(D_K)$ défini par D_K sur X_K. Par ailleurs, il existe, pour tout $j = 1, \dots, m$, un diviseur D_j qui prolonge D_K sur $X_{(s_j)}$. La partie verticale V_j du cycle $\mathrm{cyc}(D_j)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des composantes irréductibles réduites de la fibre X_{s_j}. On peut donc voir V_j comme un cycle 1-codimensionnel sur $\widetilde{X}$. On va montrer que

$$Z := H + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

est de la forme $\mathrm{cyc}(D)$ pour un certain diviseur D sur $\widetilde{X}$, ce qui achèvera la démonstration puisque X_K est normal.

Comme le schéma $\widetilde{X}$ est normal, il suffit de voir que le cycle Z est localement principal. Ecrivons $Z = \sum_{\xi \in \widetilde{X}^{(1)}} n_\xi \cdot \overline{\{\xi\}}$ et posons pour tout $x \in \widetilde{X}$,

$$T_x := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widetilde{X},x}), \quad Z_x := \sum_{\xi \in \widetilde{X}^{(1)}} n_\xi \cdot (\overline{\{\xi\}} \cap T_x).$$

Le cycle Z est localement principal si et seulement si, pour tout $x \in \widetilde{X}$, il existe une fonction rationnelle f sur T_x telle $Z_x = \mathrm{cyc}(\mathrm{div}(f))$ ([EGA IV] 21.6.7). Maintenant, si $x \in X$ se projette sur un point s_j de F, le cycle Z_x coïncide avec le cycle

$$\sum_{\xi \in (X_{(s_j)})^{(1)}} n_\xi \cdot (\overline{\{\xi\}} \cap T_x) \quad = \quad (H + V_j) \cap T_x,$$

qui n'est autre que le cycle localement principal $\mathrm{cyc}(D_j|_{T_x})$. Sinon, le point x appartient a l'ouvert régulier $\widetilde{X}_U$, sur lequel Z est automatiquement localement principal. Le cycle Z est donc bien localement principal sur $\widetilde{X}$. □

Remarque 2.25. Le S-schéma $\widetilde{X}$ construit est isomorphe à X précisément au-dessus de l'ouvert U au-dessus duquel X/S est lisse.

2.7 Une variante sans normalité

Comme signalé avant l'énoncé 2.6, il est plus agréable de disposer de modèles semi-factoriels *normaux*, sur lesquels les diviseurs peuvent être vus comme des cycles 1-codimensionnels.

Cependant, soit K le corps de fonctions d'un trait S, et soit X_K un schéma propre sur K, qui n'est *pas* normal. On peut alors se demander s'il existe des modèles propres, plats et semi-factoriels, nécessairement *non* normaux, de X_K sur S. On notera que X_K ne possède pas de modèle régulier.

Pour énoncer la « variante sans normalité » que nous avons en vue, rappelons ([TDTE VI] 3.1) qu'un K-schéma en groupes commutatif, de type fini et connexe G est dit *sans composante additive* si, notant $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, le $\overline{K}$-schéma en groupes $G_{\overline{K},\mathrm{red}}$ est extension d'une variété abélienne par un tore.

Théorème 2.26. *Soient $S^{\mathrm{hs}} \to T \to S$ des extensions de traits, telles que la composée $S^{\mathrm{hs}} \to S$ soit une hensélisation stricte de S. Soit X_K un K-schéma propre géométriquement réduit, tel que le K-schéma en groupes $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ soit sans composante additive.*

Pour tout modèle propre et plat X/S de X_K, il existe un éclatement $X' \to X$ centré dans la fibre fermée de X/S, tel que X'/S soit un modèle propre et plat de X_K, et tel que $(X')_T/T$ soit semi-factoriel.

Démonstration. Au cours de la démonstration du théorème 2.6, l'hypothèse de normalité géométrique sur le K-schéma propre X_K est intervenue pour assurer les faits suivants : X_K est réduit (donc le lemme 2.10 s'applique), chaque composante connexe de X_K possède un point étale sur K (donc, dans l'étape **1)** de la sous-section 2.3, M_K est un tore), $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ est propre (donc, toujours dans cette étape **1)**, $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ est sans composante additive), et le morphisme de normalisation $\widetilde{X} := (X')^{\mathrm{nor}} \to X'$ est fini (dans l'étape **5)** de la sous-section 2.3).

Maintenant, pour que chaque composante connexe de X_K possède un point étale sur K, il suffit que X_K soit géométriquement réduit, puisqu'alors l'ouvert de lissité de X_K est dense dans X_K ([BLR] 2.2/16).

En conclusion, sous les hypothèses du théorème 2.26, la preuve du théorème 2.6, sans l'étape **5)** de normalisation, fournit un éclatement $X' \to X$ convenable. □

Exemple 2.27. Lorsque X_K est une courbe, les hypothèses du théorème 2.26 sont vérifiées si et seulement si la courbe $X_K \otimes_K \overline{K}$ est réduite à singularités multiples ordinaires ([BLR] 9.2/9 et 9.2/10).

Remarque 2.28. Concernant les changement de traits, on dispose des variantes sans normalité des théorèmes 2.12 et 2.17 : mêmes constructions, sans normaliser.

3 Modèle de Néron d'une variété de Picard

Soit S un trait de corps de fonctions K et de corps résiduel k. Soit X_K un K-schéma propre géométriquement normal. Sa variété de Picard $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ est une variété abélienne sur K ([TDTE VI] 3.2). En particulier, elle possède un modèle de Néron A de type fini sur S. Soit d'autre part X/S un modèle propre et plat de X_K, qui est semi-factoriel sur un hensélisé strict de S. Un tel modèle existe toujours d'après le théorème 2.6. Le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est le faisceau fppf associé au préfaisceau $T \to \mathrm{Pic}(X \times_S T)$. Dans cette section, on décrit A en termes de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (théorèmes 3.3 et 3.4). On en tire ensuite une conséquence sur l'équivalence algébrique des faisceaux inversibles sur X (corollaire 3.15).

3.1 Foncteur de Picard et modèle de Néron

Commençons avec un trait S de corps de fonctions K, et un schéma X/S propre et plat à fibre générique X_K géométriquement normale, de sorte que $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ est un K-schéma *en groupes*, et même une *variété abélienne.*

Soit E l'adhérence schématique de la section unité de $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$ dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$ ([R] 3.2 c)). Le quotient fppf $\mathrm{Pic}_{X/S}/E$ a pour fibre générique $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$. On note Q l'adhérence schématique de A_K dans $\mathrm{Pic}_{X/S}/E$, et P l'image réciproque de Q par l'épimorphisme canonique $q : \mathrm{Pic}_{X/S} \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}/E$. L'inclusion $Q \hookrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}/E$ induit donc un morphisme cartésien de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{X/S} \arrow[r, "q"] & \mathrm{Pic}_{X/S}/E \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r] \arrow[u, hook] & Q \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0.
\end{tikzcd}$$

Choisissons un rigidificateur $Y \to X$ de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ ([R] 2.2.3 c)). On peut considérer le foncteur de Picard de X/S relatif au rigidificateur Y, noté $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ (*loc. cit.* 2.1). Il est représentable par un espace algébrique en groupes localement de type fini sur S (*loc. cit.* 2.3.1), et on dispose d'un épimorphisme canonique $r : (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ (*loc. cit.* 2.1.2). Notant H l'adhérence schématique du noyau de r_K dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$, on a $r(H) \subseteq E$ par fonctorialité de l'adhérence schématique (*loc. cit.* 3.2 c)). Il est prouvé dans *loc. cit.* 4.1 que

$$(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)/H \xrightarrow{\bar{r}} \mathrm{Pic}_{X/S}/E$$

est un isomorphisme, et que par suite $\mathrm{Pic}_{X/S}/E$ est un schéma en groupes localement de type fini et séparé sur S. Il en résulte que l'inclusion $Q \hookrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}/E$ est une immersion fermée de schémas, et le schéma Q est plat sur S.

Soit (P, Y) l'image réciproque de P par r, i.e. l'image réciproque de Q par le composé $q \circ r$. C'est un sous-espace fermé de $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$, qui par conséquent contient H. D'où un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)/H \arrow[r, "\bar{r}"] & \mathrm{Pic}_{X/S}/E \\
(P, Y)/H \arrow[r, "\bar{\bar{r}}"] \arrow[u, hook] & P/E = Q. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

En particulier $\bar{\bar{r}}$ est un isomorphisme.

Comme H et Q sont S-plats, la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow (P, Y) \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

montre que (P, Y) est S-plat (cf. [SGA 3] I, Exp. VI_B, 9.2 (xi)). Celui-ci est donc contenu dans $\overline{r^{-1}(A_K)}$, adhérence schématique dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ de l'image réciproque de A_K par r. Mais par fonctorialité de l'adhérence schématique, on a $q \circ r\big(\overline{r^{-1}(A_K)}\big) \subseteq Q$, i.e. $\overline{r^{-1}(A_K)} \subseteq (P, Y)$. Ainsi $(P, Y) = \overline{r^{-1}(A_K)}$. Puis

$$P = r\big((P, Y)\big) = r\big(\overline{r^{-1}(A_K)}\big)$$

est contenu dans $\overline{A_K}$, adhérence schématique de A_K dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$. Comme $q(\overline{A_K}) \subseteq Q$, on trouve finalement $P = \overline{A_K}$. En résumé :

– X schéma propre et plat sur S à fibre générique X_K géométriquement normale

- $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ variété de Picard de X_K
- $\mathrm{Pic}_{X/S}$ foncteur de Picard fppf de X/S
- P adhérence schématique de A_K dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$
- E adhérence schématique de $0_K \in A_K$ dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$
- $Q := P/E$ plus grand quotient séparé sur S de P, représentable par un schéma localement de type fini et plat sur S
- $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ foncteur de Picard de X/S relatif au rigidificateur Y, muni de la flèche d'oubli $r : (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$
- (P, Y) adhérence schématique de $r^{-1}(A_K)$ dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$
- H adhérence schématique de $r^{-1}(0_K)$ dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$.

Lorsque X_K est une courbe, ces notations sont les mêmes que celles utilisées dans [BLR] 9.5, en notant que dans ce cas, $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}} = \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$. Par ailleurs, avec ces notations, la fibre générique de P est $P_K = Q_K = A_K = \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$, à ne pas confondre avec la notation $P_K := \mathrm{Pic}_{X_K/K}$ utilisée dans la section 2, et qui n'a plus d'utilité ici.

Lemme 3.1. *Supposons de plus X_K géométriquement connexe. Si le morphisme*

$$\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathrm{Br}(X_K)$$

induit par X_K/K sur les groupes de Brauer est injectif, alors on a l'égalité

$$\mathrm{Pic}(X_K) = \mathrm{Pic}_{X/K}(K).$$

Dans ce cas, si X est semi-factoriel sur S, *alors le morphisme de restriction*

$$Q(S) \longrightarrow Q(K)$$

est bijectif.

Démonstration. Le K-schéma X_K est propre géométriquement intègre. Par conséquent, $\Gamma(\mathcal{O}_{X_K}) = K$, et la suite spectrale de Leray pour $\mathbb{G}_{mK}$ induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_K) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X_K/K}(K) \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathrm{Br}(X_K)$$

([BLR] 8.1/4). Si la flèche $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(X_K)$ est injective, on a donc bien l'égalité $\mathrm{Pic}(X_K) = \mathrm{Pic}_{X_K/K}(K)$.

L'injectivité de $Q(S) \to Q(K)$ est déjà acquise puisque Q est séparé sur S. Montrons la surjectivité, dans le cas où $\mathrm{Pic}(X_K) = \mathrm{Pic}_{X_K/K}(K)$ et X/S est *semi-factoriel*. Soit $a_K \in Q(K) = \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}(K) \subset \mathrm{Pic}(X_K)$. Soit $\mathcal{L}_K$ un faisceau inversible sur X_K représentant a_K. Puisque X est semi-factoriel sur S, il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ prolongeant $\mathcal{L}_K$. L'image de la classe de $\mathcal{L}$ par la composée

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}(S) \longrightarrow (\mathrm{Pic}_{X/S}/E)(S)$$

prolonge a_K dans $Q(S)$. □

Remarque 3.2. Par exemple, le morphisme $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(X_K)$ est injectif si $X_K(K)$ est non vide, ou si S est hensélien à corps résiduel algébriquement clos (dans le second cas on a même $\mathrm{Br}(K) = 0$ d'après un théorème de Lang, voir [BLR] page 203 pour des références).

Rappelons enfin que si X/S est une *courbe*, le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est formellement lisse sur S ([R] 2.3.2). Comme ceci cesse d'être vrai en dimension supérieure, nous serons amenés à *lissifier* des S-schémas en groupes ([BLR] page 174), voire des S-espaces algébriques en groupes (cf. appendice).

Nous pouvons maintenant énoncer l'analogue, en dimension supérieure, du théorème [R] 8.1.4 a) (ou [BLR] 9.5/4) de Raynaud.

Théorème 3.3. *Soit S un trait de corps de fonctions K et de corps résiduel k. Soit X_K un K-schéma propre, géométriquement normal et géométriquement connexe. Soient $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ la variété de Picard de X_K, et A son modèle de Néron sur S.*

Soit d'autre part X/S un modèle propre et plat de X_K, semi-factoriel sur un hensélisé strict S^{hs} de S. Soient P l'adhérence schématique de A_K dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$, E celle de la section unité de $\mathrm{Pic}_{X_K/K}$, et Q le quotient fppf *P/E, qui est représentable par un S-schéma en groupes localement de type fini et séparé sur S ([R] 4.1.1). Soit Q' le lissifié de Q.*

Notant K^{hs} le corps de fonctions de S^{hs}, supposons que le morphisme induit par $X_{K^{\mathrm{hs}}}/K^{\mathrm{hs}}$ sur les groupes de Brauer $\mathrm{Br}(K^{\mathrm{hs}}) \to \mathrm{Br}(X_{K^{\mathrm{hs}}})$ soit injectif (cf. 3.2).

Alors l'identité de A_K se prolonge en un isomorphisme de S-schémas en groupes

$$Q' \xrightarrow{\sim} A.$$

Ainsi, le modèle de Néron sur S de $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ est le séparé lissifié de son adhérence schématique dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

Démonstration. Toutes les données de l'énoncé commutent à l'hensélisation stricte de S. Pour montrer que la flèche canonique $Q' \to A$ est un isomorphisme, on peut donc supposer S strictement hensélien.

Le S-schéma en groupes Q' est séparé et lisse, de fibre générique A_K. De plus, le morphisme

$$Q'(S) \longrightarrow Q'(K)$$

est bijectif d'après le lemme 3.1. Pour démontrer le théorème, il reste à vérifier que Q' est de type fini sur S (cf. [BLR] 7.1/1). Pour cela, la méthode est la même que dans [BLR] 9.5/7, à ceci près qu'il faut travailler avec Q' au lieu de Q. Comme dans *loc. cit.*, il suffit de montrer que le morphisme canonique $Q' \to A$ induit un isomorphisme sur les composantes neutres.

Pour cela, le point clé à démontrer est que le groupe abstrait des composantes connexes $\Phi_{Q'} := Q'(k)/(Q')^0(k)$ de $(Q')_k$ est de type fini. Le même raisonnement que celui de *loc. cit.* permet alors de conclure que $(Q')^0 \to A^0$ est bien un isomorphisme.

Dans la suite de la démonstration, si G est un S-foncteur en groupes dont la fibre spéciale G_k est représentable par un k-schéma localement de type fini, on note Φ_G le groupe abstrait des composantes connexes de G_k, à savoir

$$\Phi_G := G_k(\bar{k})/G_k^0(\bar{k})$$

où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. On a

$$\Phi_G = G_k(k)/G_k^0(k)$$

lorsque G_k est lisse sur le corps séparablement clos k.

Avec ces notations, la lissification $Q' \to Q$ induit un morphisme $\Phi_{Q'} \to \Phi_Q$. Si Φ'_Q désigne son image et N son noyau, on a une suite exacte de groupes abstraits

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \Phi_{Q'} \longrightarrow \Phi'_Q \longrightarrow 0.$$

Comme la lissification est un morphisme de type fini, le groupe N est fini. On est donc ramené à montrer que Φ_Q est de type fini.

La fibre spéciale P_k de P est représentable par un sous-k-schéma en groupes fermé de $\mathrm{Pic}_{X_k/k}$ (à savoir $q_k^{-1}(Q_k)$). Le groupe Φ_Q est quotient du groupe Φ_P. Notant $\Phi'_{\mathrm{Pic}_{X/S}}$ l'image de Φ_P dans le groupe $\Phi_{\mathrm{Pic}_{X/S}}$, on a une extension

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \Phi_P \longrightarrow \Phi'_{\mathrm{Pic}_{X/S}} \longrightarrow 0,$$

avec M fini. Maintenant, le groupe de Néron-Severi géométrique $\Phi_{\mathrm{Pic}_{X/S}}$ de X_k est de type fini ([SGA 6] XIII 5.1). Par conséquent Φ_P, et donc Φ_Q, sont de type fini. Ceci achève la démonstration. □

On a réalisé le modèle de Néron A de A_K en séparant le foncteur P, puis en lissifiant le schéma en groupes obtenu. Le processus inverse, à savoir lissification *puis* séparation, permet aussi de retrouver A.

Plus précisément, notons comme précédemment (P, Y) l'adhérence schématique de $r^{-1}(A_K)$ dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$, où r désigne l'épimorphisme canonique

$$(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}\,.$$

C'est un S-espace algébrique en groupes localement de type fini, dont la fibre générique $r^{-1}(A_K)$ est lisse ([R] 2.4.3 b)). Posons :

– $(P, Y)'$ espace algébrique en groupes sur S, lissifié de (P, Y)
– I adhérence schématique de $r^{-1}(0_K)$ dans $(P, Y)'$.

Théorème 3.4. *Soit S un trait de corps de fonctions K et de corps résiduel k. Soit X_K un K-schéma propre, géométriquement normal et géométriquement connexe. Soient $A_K := \mathrm{Pic}^0_{X_K/K,\mathrm{red}}$ la variété de Picard de X_K, et A son modèle de Néron sur S.*

Soit d'autre part X/S un modèle propre et plat de X_K, semi-factoriel sur un hensélisé strict S^{hs} de S.

Notant K^{hs} le corps de fonctions de S^{hs}, supposons que le morphisme induit par $X_{K^{\mathrm{hs}}}/K^{\mathrm{hs}}$ sur les groupes de Brauer $\mathrm{Br}(K^{\mathrm{hs}}) \to \mathrm{Br}(X_{K^{\mathrm{hs}}})$ soit injectif (cf. 3.2).

Alors le modèle de Néron A admet une présentation (pour la topologie fppf*) par les S-espaces algébriques en groupes définis ci-dessus*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow (P, Y)' \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

où $(P, Y)' \to A$ est l'unique S-morphisme prolongeant $r_K : (P, Y)_K \to A_K$.

Si X est cohomologiquement plat sur S, le foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un espace algébrique ([R] 5.2). Notant alors F l'adhérence schématique de la section unité de A_K dans le lissifié P' de P, l'identité de A_K induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P' \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Les ingrédients de la démonstration sont essentiellement les mêmes que pour le théorème 3.3, mais la preuve en est indépendante.

Démonstration. On a vu en début de section que le S-schéma en groupes Q admet une présentation par des S-espaces algébriques en groupes

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow (P, Y) \longrightarrow P/E = Q \longrightarrow 0.$$

Par définition de I et H, la lissification $(P, Y)' \to (P, Y)$ induit une flèche $I \to H$. Notant C le faisceau fppf quotient $(P, Y)'/I$, on obtient un morphisme de suite exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & (P, Y)' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & (P, Y) \arrow[r] & Q \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme I est plat sur S, le faisceau C est encore un S-espace algébrique en groupes (cf. par exemple [BLR] 8.4/9). Il est localement de type fini sur S d'après l'analogue de [SGA 3] I, Exp. VI_B, 9.2 (xii) pour les espaces algébriques en groupes. Comme il est séparé sur S (I est fermé dans $(P,Y)'$), c'est un S-schéma (cf. [A] IV 4.B). Il est lisse sur S puisqu'il est quotient de $(P,Y)'$ qui est lisse sur S par I qui est plat sur S ([SGA 3] *loc. cit.*). En particulier, l'identité de A_K se prolonge en un S-morphisme $C \to A$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut supposer S strictement hensélien. Il reste alors à voir que $C(S) \to C(K)$ est surjectif et que C est de type fini sur S.

Soit $a_K \in C(K) = A_K(K) = \mathrm{Pic}^0_{X/K}(K)$. D'après le lemme 3.1, on peut représenter a_K par un faisceau inversible $\mathcal{L}_K$ sur X_K. Comme X est semi-factoriel sur S, on peut prolonger $\mathcal{L}_K$ en un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X. Par définition, le rigidificateur Y est fini sur S. On peut donc rigidifier $\mathcal{L}$ en $(\mathcal{L}, \alpha)$, définissant ainsi une section $b \in (P,Y)(S)$. Celle-ci se relève en une section b' du lissifié $(P,Y)'$, et par commutativité du diagramme ci-dessus, l'image $a \in C(S)$ de b' a pour fibre générique a_K. D'où la surjectivité de $C(S) \to C(K)$.

Montrons enfin que C/S est de type fini. Comme dans 3.3 (et dans [BLR] 9.5/7), cela revient à montrer que le groupe ordinaire Φ_C des composantes connexes de C_k est de type fini.

Le groupe Φ_C est quotient du groupe $\Phi_{(P,Y)'}$, et le morphisme de k-schémas

$$\big((P,Y)'\big)_k \longrightarrow (P,Y)_k$$

est de type fini. On est donc ramené à voir que $\Phi_{(P,Y)}$ est de type fini. Mais le noyau de

$$(P,Y)_k \longrightarrow P_k$$

est connexe ([R] 2.4.3 b)), si bien que $\Phi_{(P,Y)} = \Phi_P$. Ce dernier est de type fini parce que le groupe de Néron-Severi géométrique $\Phi_{\mathrm{Pic}_{X/S}}$ l'est ([SGA 6] XIII 5.1). Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

Maintenant, lorsque $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un espace algébrique, il n'y a pas lieu de considérer le rigidificateur Y, et la seconde partie du théorème se démontre comme la première. □

Remarque 3.5. Avec les notations des théorèmes 3.3 et 3.4, la flèche composée

$$(P,Y)' \longrightarrow (P,Y) \longrightarrow P \longrightarrow Q$$

se factorise de façon unique à travers la lissification $Q' \to Q$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (P,Y)' \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q' \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, les deux morphismes $(P,Y)' \to A$ coïncident avec r_K sur les fibres génériques, l'espace $(P,Y)'$ est lisse sur S (donc réduit) et A/S est séparé.

3.2 Comparaison des composantes neutres

Définition 3.6 ([R] 3.2 d)). *Soient T un schéma, et G un T-foncteur en groupes dont les fibres sont représentables et localement de type fini. La* composante neutre *de G est le sous-foncteur $G^0 \subset G$ dont la fibre en $t \in T$ est la composante neutre de la fibre de G en t.*

Pour étudier la situation déduite du théorème 3.4 au niveau des composantes neutres (définition 3.7), nous utiliserons en particulier la notation suivante.

Notation 3.7 ([R] 6.1.11 3)). *Soit S un trait de corps résiduel k. Soit X un schéma normal, propre et plat sur S. On note ξ_i, $i = 1, \ldots, r$, les points maximaux de la fibre spéciale X_k de X/S, d_i la longueur de l'anneau artinien $\mathcal{O}_{X_k,\xi_i}$, et X_i la composante irréductible de X_k de point générique ξ_i munie de sa structure réduite.*

On définit un entier d' par la condition suivante : c'est le plus grand entier divisant les d_i, $i = 1, \ldots, r$, tel que le cycle 1-codimensionnel sur X

$$(1/d')(X_k) = \sum_{i=1}^{r} (d_i/d')(X_i)$$

soit un diviseur.

Proposition 3.8. *Dans la situation du théorème 3.4, la flèche r_K se prolonge en un morphisme fidèlement plat localement de type fini*

$$\big((P,Y)'\big)^0 \twoheadrightarrow A^0.$$

Supposons X cohomologiquement plat sur S. Si X est normal et si $d' = 1$ (notation 3.8), alors l'identité de A_K se prolonge en un isomorphisme

$$(P')^0 \xrightarrow{\sim} A^0.$$

Démonstration. Comme I est fidèlement plat localement de type fini sur S, l'épimorphisme

$$(P,Y)' \twoheadrightarrow A$$

l'est aussi. La fibre générique $r_K^{-1}(A_K)$ de $(P,Y)'$ est connexe (puisque A_K et $\mathrm{Ker}(r_K)$ le sont, cf [R] 2.4.3 b)). L'inclusion $\big((P,Y)'\big)^0 \subseteq (P,Y)'$ est donc ouverte, et par conséquent le morphisme induit sur les composantes neutres

$$\big((P,Y)'\big)^0 \longrightarrow A^0$$

est localement de type fini, plat et surjectif sur les fibres génériques. En particulier, l'image du k-morphisme

$$\big((P,Y)'_k\big)^0 \longrightarrow A^0_k$$

est ouverte, et donc égale au groupe A^0_k tout entier. Par conséquent, le morphisme $\big((P,Y)'\big)^0 \to A^0$ est surjectif.

Lorsqu'on suppose de plus X cohomologiquement plat sur S, le résultat ci-dessus s'applique au morphisme $(P')^0 \twoheadrightarrow A^0$. Pour voir que c'est un isomorphisme si X est normal et « $d' = 1$ », on peut supposer S strictement hensélien. L'adhérence schématique F de la section unité de A_K dans le S-espace algébrique localement séparé P' est étale sur S ([R] 3.3.5), et le noyau de la flèche précédente est l'ouvert $F \cap (P')^0$ de F. Mais on a $(F \cap (P')^0)(S) \subseteq (E \cap P^0)(S)$, et les hypothèses entraînent que $(E \cap P^0)(S) = 0$ ([R] 6.4.1 3)). D'où l'isomorphisme annoncé. □

Remarque 3.9. Un cas où X est cohomologiquement plat sur S, et où $d' = 1$, est lorsque les fibres de X/S sont géométriquement réduites ([EGA III] 7.8.6).

Concernant la surjectivité au niveau des *sections*, on a la

Proposition 3.10. *On conserve les notations du théorème 3.4, et on se place dans le cas où S est hensélien et k algébriquement clos. Alors le morphisme canonique*

$$\big((P,Y)'\big)^0(S) \longrightarrow A^0(S)$$

est surjectif.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $\Gamma(\mathcal{O}_S)$ est *complet*. D'après [BLR] 9.6/2, pour montrer la surjectivité de

$$\big((P,Y)'\big)^0(S) \longrightarrow A^0(S),$$

il suffit alors de vérifier que le groupe abstrait $(P,Y)'(S)/\big((P,Y)'\big)^0(S)$ est de type fini et que le morphisme $(P,Y)'(S) \to A(S)$ est surjectif.

L'espace algébrique $(P,Y)'$ est lisse sur S, et sa fibre générique $r_K^{-1}(A_K)$ est connexe puisque A_K et $\mathrm{Ker}(r_K)$ le sont ([R] 2.4.3 b)). Le morphisme de groupes

$$(P,Y)'(S)/\big((P,Y)'\big)^0(S) \longrightarrow \Phi_{(P,Y)'}$$

est donc bijectif. Et on a déjà vu au cours de la démonstration du théorème 3.4 que ce groupe est de type fini.

Passons à la surjectivité de $(P,Y)'(S) \to A(S)$. Soit $a \in A(S)$. Notons $a_K \in A_K(K)$ sa fibre générique. On a vu au cours de la démonstration du théorème 3.4 que l'on pouvait trouver $b' \in (P,Y)'(S)$ dont l'image dans $A(S)$ prolonge a_K. Comme A/S est séparé, l'image de b' est a. Ceci achève la démonstration dans le cas où $\Gamma(\mathcal{O}_S)$ est complet.

Supposons maintenant S hensélien. Soit $a \in A^0(S)$. Notant $G \to S$ l'image réciproque de $\big((P,Y)'\big)^0 \twoheadrightarrow A^0$ par $a : S \to A^0$, il résulte du cas précédent qu'il existe $\hat{b} \in G(\widehat{S})$, où $\widehat{S}$ est le spectre du complété de $\Gamma(\mathcal{O}_S)$ par rapport à son idéal maximal. Soit $U \to G$ un recouvrement étale représentable du S-espace algébrique G. Comme $\widehat{S}$ est strictement hensélien, $\hat{b}$ se relève en un élément de $U(\widehat{S})$. Remarquons maintenant que la fibre générique de U/S est lisse. En effet, il suffit de voir que $\big((P,Y)'\big)^0 \twoheadrightarrow A^0$ est lisse sur les fibres génériques, ou encore que l'épimorphisme canonique $(P,Y)_K \to A_K$ est lisse. Mais c'est bien le cas puisque $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)_K \to \mathrm{Pic}_{X_K/K}$ l'est ([R] 2.4.3 b)). Par conséquent, l'extension $\widehat{S} \to S$ étant d'indice de ramification 1, il existe une suite finie de S-dilatations $U' \to U$ centrées dans les fibres fermées, telles que $\hat{b}$ se relève dans le lieu lisse de U'/S ([BLR] 3.6/4). Mais alors, comme S est hensélien, U', et donc U puis G, possèdent une S-section. Son image dans $\big((P,Y)'\big)^0$ fournit un relèvement de a. $\square$

Corollaire 3.11. *Dans la situation de la proposition 3.11, on a un isomorphisme*

$$\big((P,Y)'\big)(S)\Big/\Big(\big((P,Y)'\big)^0(S)+I(S)\Big) \xrightarrow{\ \sim\ } A(S)/A^0(S)$$

c'est-à-dire, en termes des groupes des composantes connexes des fibres spéciales, une suite exacte

$$0 \longrightarrow I(S)\Big/\Big(I(S)\cap\big((P,Y)'\big)^0(S)\Big) \longrightarrow \Phi_{(P,Y)'} \longrightarrow \Phi_A \longrightarrow 0.$$

Remarque 3.12. Lorsque de plus X/S est cohomologiquement plat, i.e. lorsque $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un espace algébrique, le corollaire 3.12 s'écrit

$$P'(S)/\big((P')^0(S)+F(S)\big) \xrightarrow{\ \sim\ } \Phi_A.$$

(avec les notations du théorème 3.4). La bijection $P'(S) \simeq P(S)$ induit une bijection $F(S) \simeq E(S)$. Le groupe Φ_A s'insère donc dans une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P^0(S)\Big/\Big(P^0(S)\cap\big((P')^0(S)+F(S)\big)\Big) \longrightarrow \Phi_A \longrightarrow P(S)/\big(P^0(S)+E(S)\big) \longrightarrow 0.$$

Si X est normal et si $d'=1$ (notation 3.8), le noyau se simplifie en $P^0(S)/(P')^0(S)$ (puisqu'alors $E(S)\cap P^0(S)=0$ d'après [R] 6.4.1 3)).

Passons à un corollaire de la proposition 3.11 concernant l'équivalence algébrique sur X.

Définition 3.13. (cf. [SGA 6] XIII 4.1 et 4.4) *Soit $Z \to T$ un morphisme propre. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_Z$-module inversible. On dit que $\mathcal{L}$ est* algébriquement équivalent à zéro (relativement à T) *si son image dans $\mathrm{Pic}_{Z/T}(T)$ appartient au sous-groupe $\mathrm{Pic}^0_{Z/T}(T)$. On notera $\mathrm{Pic}^0(Z/T)$ (ou simplement $\mathrm{Pic}^0(Z)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le sous-groupe du groupe de Picard de Z formé des classes de $\mathcal{O}_Z$-modules inversibles algébriquement équivalents à zéro relativement à T.*

Par définition de $\mathrm{Pic}^0_{Z/T}$, le fait pour un $\mathcal{O}_Z$-module inversible d'être algébriquement équivalent à zéro relativement à T peut se vérifier sur les fibres de Z/T.

Corollaire 3.14. *Soit S un trait hensélien, de corps résiduel algébriquement clos k et de corps des fractions K. Soit X_K un K-schéma propre, géométriquement normal et géométriquement connexe. Soit X/S un modèle de X_K, propre, plat et semi-factoriel sur S. Soit A/S le modèle de Néron de la variété de Picard de X_K.*

Soit $\mathcal{L}_K$ un $\mathcal{O}_{X_K}$-module inversible algébriquement équivalent à zéro. Si le point correspondant de $A_K(K)$ se prolonge dans la composante neutre de A, alors il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ algébriquement équivalent à zéro relativement à S prolongeant $\mathcal{L}_K$.

En particulier, soit n l'exposant du groupe des composantes connexes de A_k. Pour tout $\mathcal{O}_{X_K}$-module inversible $\mathcal{L}_K$ algébriquement équivalent à zéro, il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}'$ algébriquement équivalent à zéro relativement à S prolongeant $\mathcal{L}_K^{\otimes n}$. Autrement dit, le conoyau de la flèche de restriction

$$\mathrm{Pic}^0(X/S) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X_K)$$

est tué par n.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_K$ d'image $a_K \in \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}(K) = A_K(K)$, et supposons que a_K se prolonge en $a \in A^0(S)$. D'après la proposition 3.11, on peut relever a en $b \in \big((P,Y)'\big)^0(S)$. Maintenant, le morphisme de lissification $(P,Y)' \to (P,Y)$ induit une inclusion

$$\big((P,Y)'\big)^0(S) \subseteq (P,Y)^0(S).$$

La section b correspond via cette inclusion à la classe d'un couple $(\mathcal{L},\alpha)$. Comme la flèche composée

$$(P,Y)^0 \longrightarrow (P,Y) \longrightarrow P$$

se factorise par P^0, qui est un sous-foncteur de $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$, le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à zéro.

D'autre part, le diagramme commutatif (cf. remarque 3.5)

$$\begin{tikzcd}
(P,Y)' \arrow[rr] \arrow[d] & & A \arrow[d] \\
(P,Y) \arrow[r] & P \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

montre que le $\mathcal{O}_{X_K}$-module inversible $\mathcal{L} \otimes K$ représente a_K. Comme

$$\mathrm{Pic}(X_K) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X_K/K}(K)$$

est injectif (et même bijectif, cf. lemme 3.1), le faisceau $\mathcal{L} \otimes K$ est donc isomorphe à $\mathcal{L}_K$. □

Pour finir, signalons des conditions suffisantes pour que l'espace algébrique (P,Y) utilisé tout au long de cette section 3 soit représentable par un schéma.

Proposition 3.15. *Soit S un trait de corps de fonctions K et de corps résiduel k. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas propre et plat. Si $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ et si X est normal, alors la composante neutre $(P,Y)^0$ de l'espace algébrique en groupes (P,Y) est représentable par un schéma séparé sur S. Si de plus k est séparablement clos, alors (P,Y) est représentable par un schéma.*

Démonstration. Cette proposition est énoncée et démontrée dans [LLR], proposition 3.2, avec $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ au lieu de (P,Y), et sous les hypothèses additionnelles suivantes : f est de dimension relative 1 et X est régulier (*loc. cit.*, début de la section 3). Nous allons reprendre ici la démonstration de *loc. cit.*, pour s'assurer qu'elle fonctionne dans la situation de l'énoncé 3.16.

Le premier point à noter est le suivant. Lorsque X/S est une courbe, l'espace algébrique $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est *lisse* sur S, si bien que sa composante neutre $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)^0$ est toujours représentable par un espace algébrique localement de type fini (ouvert dans $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$). Pour que $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)^0$ soit représentable par un schéma, il lui suffit alors d'être séparé sur S ([A] IV 4.B). En se restreignant au sous-espace fermé (P,Y) de $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$, on va également pouvoir travailler avec une composante neutre qui est représentable *a priori* par un espace algébrique, et ceci sans hypothèse de lissité ou de dimension. Le foncteur $(P,Y)^0$ est en effet toujours représentable par un sous-espace ouvert de (P,Y), puisque la fibre générique de (P,Y) est un K-schéma en groupes *connexe* (égal à $r_K^{-1}(A_K)$).

Ceci étant, posons $G := (P,Y)$, et montrons que l'espace algébrique G^0 est un schéma. Comme rappelé ci-dessus, il lui suffit pour cela d'être séparé sur S. Ceci est le cas si et seulement si sa section unité est une immersion fermée. Notant E_Y l'adhérence schématique de 0_K dans G, l'adhérence schématique de 0_K dans G^0 est $E_Y \cap G^0$, et comme c'est un sous-espace fermé de G^0, il suffit donc de montrer que $0 = E_Y \cap G^0$. Pour vérifier cette dernière égalité, on peut supposer S strictement hensélien, et comme $E_Y \cap G^0$ est étale sur S ([R] 3.3.5), il suffit alors de voir que $(E_Y \cap G^0)(S) = \{0\}$. On va montrer plus généralement que le groupe $\big(E_Y \cap (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)^0\big)(S)$ est nul.

Etablissons d'abord l'injectivité de l'application $E_Y(S) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ induite par le morphisme canonique $r : (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$. Soit donc α un automorphisme du $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{O}_Y$ tel que $(\mathcal{O}_X, \alpha)$ définisse un élément de $E_Y(S)$, et montrons que $(\mathcal{O}_X, \alpha)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_X, \mathrm{Id})$. Posons $a := \alpha(1) \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)^*$. La condition $(\mathcal{O}_X, \alpha) \in E_Y(S)$ signifie qu'il existe un automorphisme λ_K du $\mathcal{O}_{X_K}$-module $\mathcal{O}_{X_K}$ tel que $\alpha|_{Y_K} = \lambda_K|_{Y_K}$. Autrement dit, que a, vu dans $\Gamma(\mathcal{O}_{Y_K})^*$, est dans l'image de $K^* = \Gamma(\mathcal{O}_{X_K})^* \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{Y_K})^*$. Comme Y est fini donc entier sur S, on trouve ainsi $a \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)^* \cap K^* = \Gamma(\mathcal{O}_S)^*$, et la multiplication par a dans $\mathcal{O}_X$ définit un isomorphisme $\lambda : (\mathcal{O}_X, \mathrm{Id}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X, \alpha)$.

Montrons maintenant que tout couple $(\mathcal{L}, \alpha) \in \big(E_Y \cap (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)^0\big)(S)$ est trivial. D'après ce que l'on vient de voir, il suffit de montrer que le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est trivial.

Par hypothèse, le faisceau $\mathcal{L}$ définit un élément de $(E \cap \mathrm{Pic}^0_{X/S})(S)$. Or, comme X est normal, ce groupe est engendré par $(1/d')(X_k)$ (notation 3.8 et [R] 6.4.1 3)). On peut donc supposer $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ avec $D = (q/d')(X_k)$ et $0 \leq q \leq d'-1$. Notant π une uniformisante de $\Gamma(\mathcal{O}_S)$, on a alors $\mathcal{L}^{d'} = \pi^q \mathcal{O}_X$. Comme ce faisceau est trivial, l'injectivité établie ci-dessus fournit un isomorphisme $\mu : (\mathcal{O}_X, \mathrm{Id}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{L}^{d'}, \alpha^{d'})$. Posons $a := \alpha(1) \in \Gamma(\mathcal{L}|_Y)$. Comme $\Gamma(\mathcal{O}_X) = \Gamma(\mathcal{O}_S)$, il existe donc $u \in \Gamma(S)^*$ tel que $a^{d'} = \mu(1)|_Y = \pi^q u \in \Gamma(\mathcal{L}^{d'}|_Y)$.

D'autre part, la condition $(\mathcal{L}, \alpha) \in E_Y(S)$ entraîne comme plus haut que a, vu dans $\Gamma(\mathcal{L}|_Y) \otimes K = \Gamma(\mathcal{O}_{Y_K})$, appartient à K^*. Par conséquent, l'égalité $a^{d'} = \pi^q u$ dans $\Gamma(\mathcal{L}^{d'}|_Y) \otimes K$ montre que d' divise q. Mais alors $q = 0$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$.

On a ainsi prouvé que G^0 était représentable par un schéma séparé sur S. D'autre part, par définition, le groupe $G = (P,Y)$ est l'adhérence schématique de sa fibre générique. Lorsque k est séparablement clos, on en déduit que le S-espace algébrique localement de type fini G est représentable par un schéma ([R] 3.3.6 2)). $\square$

4 Appendice : lissification des espaces algébriques en groupes

Soit S un trait de corps de fonctions K.

Définition 4.1. *Soit G un S-espace algébrique en groupes, localement de type fini sur S. On suppose que la fibre générique de G est lisse sur K. Une* lissification du groupe *G est un morphisme de S-espaces algébriques en groupes $G' \to G$, où G' est lisse sur S, vérifiant la propriété universelle suivante :*

tout morphisme de S-espaces algébriques $Z \to G$, avec Z lisse sur S, se factorise de façon unique par $G' \to G$.

Une lissification du groupe G est unique à unique isomorphisme près. L'existence des lissifications de groupes dans la catégorie des S-schémas est établie dans [BLR], 7.1/5. L'objet de cet appendice est d'étendre les méthodes de *loc. cit.* pour obtenir des lissifications de groupes dans la catégorie des S-espaces algébriques.

4.1 Dilatation des espaces algébriques

Soient k le corps résiduel de S et π une uniformisante de $\Gamma(\mathcal{O}_S)$. Soient X un espace algébrique localement de type fini sur S et Y_k un sous-espace fermé de X_k. La donnée, pour tout S-schéma U et tout S-morphisme étale $U \to X$, de la dilatation $U'_\pi \to U$ du schéma U le long du sous-schéma fermé $Y_{k,U} := Y_k \times_X U$ ([BLR] 3.2), constitue une construction locale pour la topologie étale de X, au sens de [Kn] I.1.11. En effet, si $V \to U$ est un morphisme de X-schémas étales, alors c'est un morphisme étale, donc plat, et par conséquent $V \times_U U'_\pi = V'_\pi$. Cette construction est effective puisque les dilatations sont des morphismes affines (*loc. cit.* I.1.12 et I.4.12). Les dilatations $U'_\pi \to U$ descendent donc en un S-morphisme affine d'espaces algébriques $u : X'_\pi \to X$.

Définition 4.2. *Le morphisme $u : X'_\pi \to X$ construit ci-dessus est* la dilatation de X le long de Y_k.

La propriété universelle de la dilatation est la suivante.

Proposition 4.3. *L'espace algébrique X'_π est plat sur S et $u_k : (X'_\pi)_k \to X_k$ se factorise de façon unique par Y_k. De plus, pour tout espace algébrique Z plat sur S, et pour tout S-morphisme $v : Z \to X$ tel que $v_k : Z_k \to X_k$ se factorise par Y_k, il existe un unique S-morphisme $v' : Z \to X'_\pi$ tel que $v = u \circ v'$.*

Démonstration. La première assertion résulte de l'énoncé analogue pour les schémas ([BLR] 3.2/1 (a)) et du lemme général 4.4 ci-dessous appliqué à la situation

$$\begin{tikzcd} (X'_\pi)_k \arrow[d] & Y_k \arrow[d] \\ X'_\pi \arrow[r, "u"] & X. \end{tikzcd}$$

Montrons la seconde assertion. Soient Z un espace algébrique plat sur S et $v : Z \to X$ un S-morphisme tel que $v_k : Z_k \to X_k$ se factorise par Y_k. Choisissons un relèvement $\tilde{v} : V \to U$ de v entre des recouvrements étales représentables $p : V \to Z$ et $p : U \to X$ de Z et X.

Soit $\tilde{u}$ la dilatation de U le long de $Y_{k,U}$. Posons $R := U \times_X U$. Par construction locale de X'_π, la dilatation $R'_\pi \to R$ de R le long de $Y_{k,R}$ coïncide avec le produit fibré $U'_\pi \times_{X'_\pi} U'_\pi$. On a donc trois diagrammes exacts, reliés par des S-morphismes de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & X'_\pi \arrow[d, "u"'] & U'_\pi \arrow[l, "p"'] \arrow[dd, "\tilde{u}"'] & R'_\pi \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] \arrow[ddd, "\tilde{\tilde{u}}"] \\
Z \arrow[r, "v"] & X & & \\
V \arrow[u, "p"] \arrow[rr, "\tilde{v}"] \arrow[uurr, dotted, "\tilde{v}'"] & & U \arrow[ul, "p"] & \\
V \times_Z V \arrow[u, shift left, "p_2"'] \arrow[u, shift right, "p_1"] \arrow[rrr, "\tilde{\tilde{v}}"] \arrow[uuurrr, dotted, "\tilde{\tilde{v}}'"] & & & R \arrow[ul, shift left, "p_1"'] \arrow[ul, shift right, "p_2"]
\end{tikzcd}$$

Le carré

$$\begin{tikzcd}
Y_k \arrow[r] & X_k \\
Y_{k,U} \arrow[u] \arrow[r] & U_k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

étant cartésien, la factorisation de v_k par Y_k induit une factorisation de $\tilde{v}_k$ par $Y_{k,U}$. Comme V est un schéma plat sur S, il existe un unique S-morphisme $\tilde{v}' : V \to U'_\pi$ tel que $\tilde{v} = \tilde{u} \circ \tilde{v}'$ ([BLR] 3.2/1 (b)). De même, il existe un unique S-morphisme $\tilde{\tilde{v}}' : V \times_Z V \to R'_\pi$ tel que $\tilde{\tilde{v}} = \tilde{\tilde{u}} \circ \tilde{\tilde{v}}'$.

Par commutativité dans le grand diagramme, on vérifie que

$$\tilde{u} \circ p_1 \circ \tilde{\tilde{v}}' = \tilde{v} \circ p_1 = \tilde{u} \circ \tilde{v}' \circ p_1.$$

Par *unicité* de la factorisation de $\tilde{v} \circ p_1$ par $\tilde{u}$ (*loc. cit.*), on en déduit $p_1 \circ \tilde{\tilde{v}}' = \tilde{v}' \circ p_1$. De même, $p_2 \circ \tilde{\tilde{v}}' = \tilde{v}' \circ p_2$, et par conséquent $\tilde{v}'$ induit un S-morphisme $v' : Z \to X'_\pi$. Puis, en utilisant que $p : V \to Z$ est un épimorphisme, on obtient que $v = u \circ v'$.

Reste à voir l'unicité d'un tel v'. Cette question étant locale sur Z, on peut supposer que Z est un schéma. Soit $U \to X$ un recouvrement étale représentable de X. Formons les deux carrés *cartésiens*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v'"] & X'_\pi \arrow[r, "u"] & X \\
Z \times_{X'_\pi} U'_\pi \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{v}'"] & U'_\pi \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{u}"] & U. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Le produit fibré $Z \times_{X'_\pi} U'_\pi$ est un schéma, ce qui permet d'utiliser le résultat d'unicité connu pour les schémas. En effet, le grand rectangle étant cartésien, la flèche $\tilde{v}'$ apparaît donc comme *la* factorisation par $\tilde{u}$ de l'image réciproque de v par $U \to X$. Or, par unicité de la descente, $\tilde{v}'$ détermine entièrement v'. $\square$

Lemme 4.4. *Considérons un diagramme de S-espaces algébriques*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Choisissons des relèvements $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{f}$ de α, β, f sur des recouvrements étales représentables p, q, p', q' de X, Y, X', Y' :

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "p'"] \arrow[dd, "\tilde{\alpha}"'] & X' \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\beta"] & V' \arrow[l, "q'"'] \arrow[dd, "\tilde{\beta}"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & \\
U \arrow[ur, "p"] \arrow[rrr, "\tilde{f}"] & & & V. \arrow[ul, "q"']
\end{tikzcd}$$

Supposons qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"'] & V' \arrow[d, "\tilde{\beta}"] \\
U \arrow[r, "\tilde{f}"] & V.
\end{tikzcd}$$

Alors, si β est un monomorphisme, la flèche $\tilde{f}'$ induit une flèche $f' : X' \to Y'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}$$

De plus, une telle factorisation f' de f par α et β est unique.

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "p'"] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{f}'"] \arrow[dd, "\tilde{\alpha}"'] & X' \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\beta"] & V' \arrow[l, "q'"'] \arrow[dd, "\tilde{\beta}"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & \\
U \arrow[ur, "p"] \arrow[rrr, "\tilde{f}"] & & & V \arrow[ul, "q"']
\end{tikzcd}$$

montre que $\beta \circ q' \circ \tilde{f}' = f \circ \alpha \circ p'$. Ainsi, pour tout S-schéma T et pour tout $u'_1, u'_2 \in U'(T)$,

$$p'(u'_1) = p'(u'_2) \Rightarrow \beta(q'(\tilde{f}'(u'_1))) = \beta(q'(\tilde{f}'(u'_2))) \Rightarrow q'(\tilde{f}'(u'_1)) = q'(\tilde{f}'(u'_2))$$

puisque β est un monomorphisme. On en déduit que $\tilde{f}'$ passe aux quotients en une flèche $f' : X' \to Y'$. On vérifie que f' est bien une factorisation de f en utilisant l'épimorphisme p. Cette factorisation est unique puisque β est un monomorphisme. □

Lemme 4.5. *Soient X^i des S-espaces algébriques localement de type fini, et Y^i_k des sous-espaces fermés de X_k, pour $i = 1, 2$. La dilatation de $X^1 \times_S X^2$ le long de $Y^1_k \times_k Y^2_k$ est le produit $(X^1)'_\pi \times_S (X^2)'_\pi$ des dilatations de X^i le long de Y^i_k. En particulier, la dilatation d'un S-espace algébrique en groupes localement de type fini G le long d'un sous-groupe fermé de G_k est un homomorphisme de S-espaces algébriques en groupes.*

Démonstration. Le produit des dilatations $(X^1)'_\pi \to X_1$ et $(X^2)'_\pi \to X_2$ vérifie la propriété universelle de la dilatation $(X^1 \times_S X^2)'_\pi \to X^1 \times_S X^2$, d'où la première assertion. La seconde assertion en résulte, en utilisant que la loi de groupe de G induit une flèche $(G \times_S G)'_\pi \to G'_\pi$ (proposition 4.3). □

4.2 Lissification des groupes

Soit G un S-espace algébrique en groupes, localement de type fini sur S, de fibre générique lisse. Notons S^{hs} un hensélisé strict de S et k_s son corps résiduel. Comme G_k est représentable par un schéma, on peut considérer le sous-schéma fermé réduit F_k de G_k, dont l'espace topologique sous-jacent est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des k_s-points de G_k qui se relèvent dans $G(S^{\mathrm{hs}})$. C'est un sous-groupe fermé de G_k. La dilatation de G le long de F_k

$$u : G_1 \longrightarrow G$$

est un homomorphisme de S-espaces algébriques en groupes (lemme 4.5).

Fixons une fois pour toutes un recouvrement étale représentable $p : U \to G$ de G. Le schéma U est localement de type fini sur S, à fibre générique lisse. Le sous-schéma fermé $F_{k,U}$ de U_k est $U(S^{\mathrm{hs}})$-permis, au sens de [BLR] page 71. On a même plus précisément :

1. L'ensemble des k_s-points de $F_{k,U}$ qui se relèvent dans $U(S^{\mathrm{hs}})$ est schématiquement dense dans $F_{k,U}$.
2. Le schéma $F_{k,U}$ est lisse sur k et $\Omega^1_{U/S}|_{F_{k,U}}$ est libre.

Remarquons d'abord que $F_{k,U}$ est exactement le sous-schéma fermé réduit de U_k ayant pour espace topologique sous-jacent l'adhérence de Zariski de l'ensemble des k_s-points de U_k qui se relèvent dans $U(S^{\mathrm{hs}})$ (utiliser [EGA IV] 11.10.5 (ii) b)). D'où le point 1. D'autre part, le k-schéma en groupes F_k est géométriquement réduit ([EGA IV] 11.10.7), donc lisse. Par conséquent, le k-schéma $F_{k,U}$ est lisse. Enfin, le morphisme $p_k : U_k \to G_k$ étant étale, on a

$$\Omega^1_{U/S}|_{F_{k,U}} = \Omega^1_{U_k/k}|_{F_{k,U}} = (p_k)^*\Omega^1_{G_k/k}|_{F_{k,U}}.$$

Comme $\Omega^1_{G_k/k}$ est libre, la seconde assertion du point 2 en résulte.

Choisissons une fois pour toutes un relèvement $e_U \in U(S^{\mathrm{hs}})$ de la section neutre $e \in G(S^{\mathrm{hs}})$. Notons $\delta(e_U)$ son défaut de lissité et e'_U son unique factorisation par la dilatation $U_1 \to U$ de U le long de $F_{k,U}$. Comme $F_{k,U}$ est $U(S^{\mathrm{hs}})$-permis,

$$\delta(e'_U) \leq \max\{0, \delta(e_U) - 1\}$$

d'après [BLR] 3.4/1. On peut alors appliquer les arguments précédents au recouvrement $p_1 : U_1 \to G_1$ à la place de p, et à la section e'_U à la place de e_U. En composant un nombre fini de dilatations, on obtient donc un morphisme de S-espaces algébriques en groupes $G' \to G$ qui induit un isomorphisme sur les fibres génériques, et un recouvrement étale représentable $U' \to G'$ tel que la section neutre de G' se relève dans l'ouvert de lissité U'_{lisse} du S-schéma U'. En particulier, la section neutre de G'_k se relève dans $(U'_{\mathrm{lisse}})_k$, et c'est donc un point lisse du k-schéma en groupes G'_k. Par conséquent, G'_k est lisse sur k. Les fibres de G' sur S sont donc lisses, et comme G' est plat sur S (proposition 4.3), on en déduit que G' est lisse sur S.

Montrons que $G' \to G$ est une lissification du groupe G. Soit $f : Z \to G$ un morphisme de S-espaces algébriques, avec Z lisse sur S. Représentons f par un morphisme $\tilde{f} : V \to U$ où $V \to Z$ est un recouvrement étale représentable de Z. Comme V est un schéma lisse sur S, l'ensemble des k_s-points de V_k qui se relèvent dans $V(S^{\mathrm{hs}})$ est schématiquement dense dans V_k. Par conséquent $\tilde{f}_k$ se factorise par $F_{k,U}$. En appliquant le lemme 4.4 à la situation

$$\begin{tikzcd} Z_k \arrow[d] & F_k \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "f"] & G, \end{tikzcd}$$

on en déduit que f_k se factorise de façon unique par F_k. D'après la proposition 4.3, la flèche f se factorise donc de façon unique par $u : G_1 \to G$. Une répétition finie de cet argument montre que f se factorise, de façon unique, par $G' \to G$. Conclusion, $G' \to G$ est bien une lissification du S-espace algébrique en groupes G.

Références

[A] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Bull. Soc. Math. Fr. **33** (1973), 5-79.

[B] J.-F. Boutot, *Schéma de Picard local*, Lect. Notes Math. **632**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[B A] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 1-3, Masson, Paris, 1970, Chap. 4-7, Masson, Paris, 1981.

[B AC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. 1-4, Masson, Paris, 1985, Chap. 5-7, Hermann, Paris, 1975.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Erg. Math. 3. Folge **21**, Springer-Verlag, 1990.

[BLR IV] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Formal and rigid geometry IV. The Reduced Fiber Theorem*, Invent. Math. **119** (1995), 361-398.

[BX] S. Bosch, X. Xarles, *Component groups of Néron models via rigid uniformization*, Math. Ann. **306** (1996), 459-486.

[C] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata's compactifications*, Journal of the Ramanujan Math. Soc. **22** No. 3 (2007), 205-257.

[D] P. Deligne, *Le théorème de plongement de Nagata*, Kyoto J. Math. **50** No. 4 (2010), 661-670.

[EGA I] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Le langage des schémas*, Publ. Math. IHES **4** (1960).

[EGA II] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. IHES **8** (1961).

[EGA III] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHES **11** (1961), **17** (1963).

[EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. IHES **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[FR] D. Ferrand, M. Raynaud, *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4è série, t. **3** No. 3 (1970), 295-311.

[Kn] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, Lect. Notes Math. **203**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[Kü] K. Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing*, Duke Math. J. **95(1)** (1998), 161-212.

[L] W. Lütkebohmert, *On compactification of schemes*, Manuscripta Math. **80** (1993), 95-111.

[LLR] Q. Liu, D. Lorenzini, M. Raynaud, *Néron models, Lie algebras, and reduction of curves of genus one*, Invent. Math. **157** (2004), 455-518.

[N] A. Néron, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. Math. **82** (1965), 249-331.

[P] C. Pépin, *Néron's pairing and relative algebraic equivalence*, à paraître dans Algebra and Number Theory.

[R] M. Raynaud, *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES **38** (1970), 27-76.

[RG] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1-89.

[S] P. Samuel, *Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 237-249.

[SGA 3] A. Grothendieck et al., *Schémas en groupes* I,II,III, Lect. Notes Math. **151, 152, 153**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[SGA 6] A. Grothendieck et al., *Théorie des intersections et Théoréme de Riemann-Roch*, Lect. Notes Math. **225**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[TDTE VI] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales*, Exp. No. 236, Séminaire Bourbaki, t. **14**, 1961-1962, SMF, Paris, 1995, 221-243.