

TRAVAUX DIRIGÉS - 2

## 1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

### EXERCICE 1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) au point  $x \in \mathbb{R}$ .

### EXERCICE 2

Soient  $\mathcal{P}_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\mathbf{X}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .

1. Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

2. Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de  $n$  et  $m$ .

### EXERCICE 3

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ . On note  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  avec  $n + 1$  points et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $Y_i = f(X_i)$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .

Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement  $f$  et  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On utilisera pour cela la fonction PLOT dont la syntaxe est PLOT(x, y) où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^k$ . Cette fonction relie successivement les points  $(\mathbf{x}(j), \mathbf{y}(j))$ , pour  $j$  allant de 1 à  $k$ , par des segments.

## 2 Dérivation numérique

### EXERCICE 4

On note  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4.1)$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de  $f'(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

### EXERCICE 5

On note  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5.1)$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de  $f'(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

## EXERCICE 6

On note  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6.1)$$

Ecrire une fonction `DERIVESECONDE2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de  $f^{(2)}(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .