Méthodes Numériques I

Algorithmique numérique

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

29 mars 2016

Plan

Définition

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0, n]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Théorème

Theorem 1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \quad (3)$$

Exemple

A titre d'exemple, on représente, En figure 1, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à 7 points donnés.

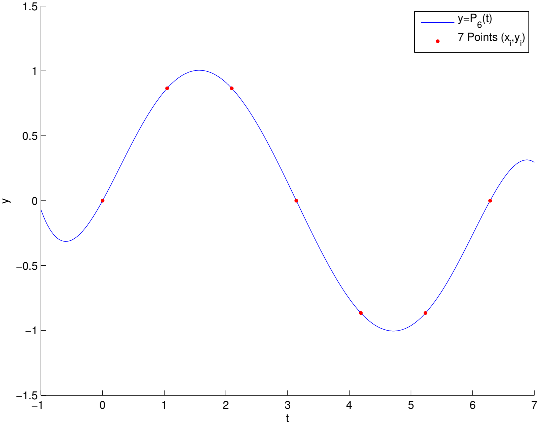


FIGURE – Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés)

Exercices

Exercise 1.1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $x \in \mathbb{R}$.

Exercise 1.2

Soit $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que
$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i),\ \forall i \in [\![1,m]\!].$$
2. Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de n et m.

Exercices

Exercise 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ la dicrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n+1$ points et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i), \ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$.
Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement f et $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(X_i, Y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) sur l'intervalle $[a, b]$.
On utilisera pour celà la fonction PLOT dont la syntaxe est `PLOT(x,y)` où `x` et `y` sont des vecteurs de $\mathbb{R}^k$. Cette fonction relie successivement les points `(x(j),y(j))`, pour j allant de 1 à k, par des segments.

Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{4}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$.

Erreur de l'interpolation

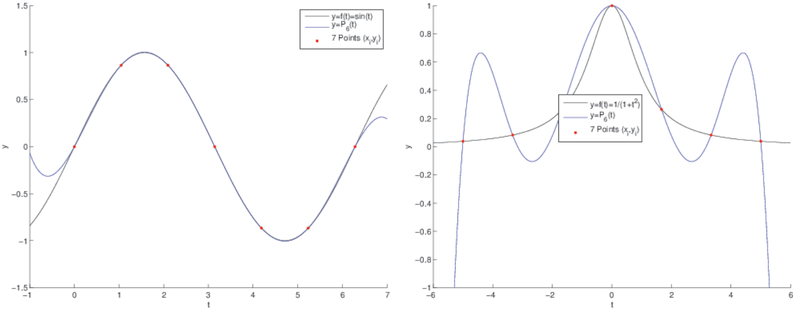


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

Erreur de l’interpolation

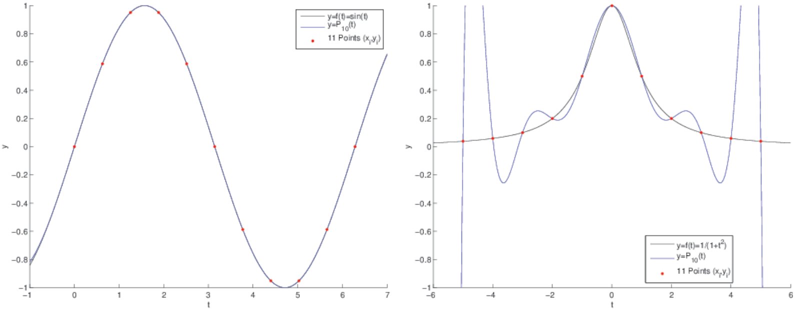


FIGURE – Erreurs d’interpolation avec $n = 10$

Erreur de l'interpolation

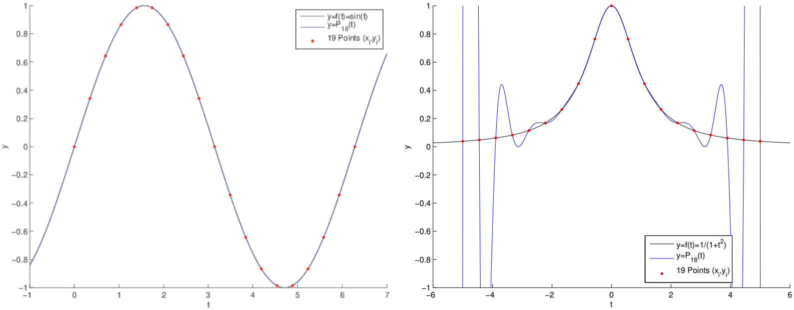


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Erreur de l'interpolation

Theorem 2: Cauchy, 1840

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction $(n+1)$-fois différentiable et $\mathcal{P}_n(t)$ le polynôme d'interpolation de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors, $\forall t \in [a, b]$, $\exists \xi_t \in (min_{i\in[\![0,n]\!]}(x_i, t), max_{i\in[\![0,n]\!]}(x_i, t))$,

$$f(t) - \mathcal{P}_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \tag{5}$$

Points de Chebyshev

Pour minimiser l'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction f par un polynôme d'interpolation de Lagrange, on peut, pour un n donné, "jouer" sur le choix des points x_i :
Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - \bar{x}_i| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|, \ \forall (x_i)_{i=0}^n, \ x_i \in [a, b], \text{ distincts 2 à 2} \tag{6}$$

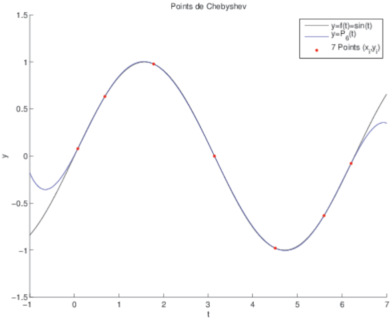
Points de Chebyshev

Theorem 3

Les points réalisant (6) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{7}$$

Points de Chebyshev



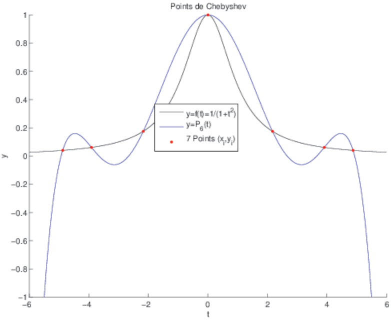


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

Points de Chebyshev

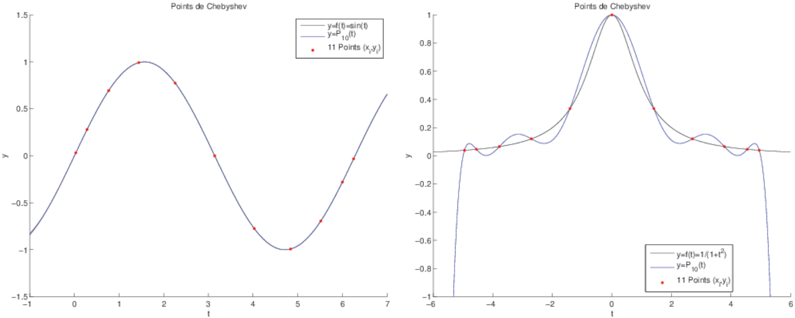


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

Points de Chebyshev

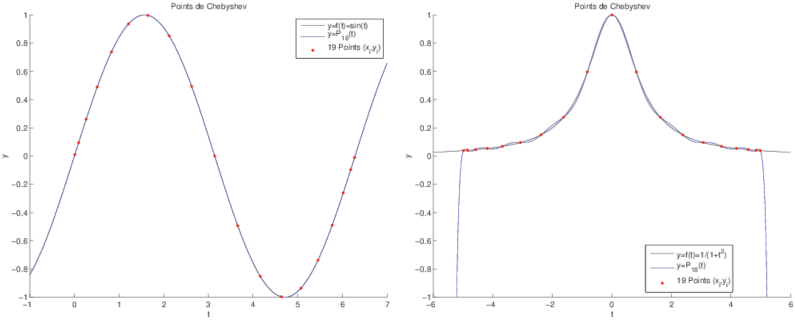


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

Dérivée

On propose de chercher une approximation de la dérivée première de f en un point $x \in]a, b[$.

Definition 2.1

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dérivable en un point $x \in]a, b[$ si la limite suivante existe et est finie

$$f'(x) = lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x)) \tag{8}$$

Premières approximations

différence finie progressive :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

différence finie rétrograde :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{10}$$

Estimation d'erreur

Theorem 4: Taylor-Lagrange

On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h$ appartienne à I, il existe $\theta_h \in]0,1[$ tel que l'on ait

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta_h h) \tag{11}$$

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x+h[$, $\exists \xi_- \in]x-h, x[$,tel que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (12)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (13)$$

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x+h[$, $\exists \xi_- \in]x-h, x[$,tel que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \tag{12}$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \tag{13}$$

- Ces formules sont des approximations d'ordre 1 de $f'(x)$ par rapport à h.

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x+h[$, $\exists \xi_- \in]x-h, x[$,tel que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= f'(x) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \qquad (12) \\ \frac{f(x)-f(x-h)}{h} &= f'(x) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \qquad (13) \end{aligned}$$

- Ces formules sont des approximations d'ordre 1 de $f'(x)$ par rapport à h.
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{x, x+h\}$ et $\{x-h, x\}$.

Exercice 1

Exercise 2.1

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{14}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au troisième ordre.

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{15}$$

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{15}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées.**

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{15}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées.**
- Cette approximation est d'ordre 2.

Exercice 2

Exercise 2.2

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{16}$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a, b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au quatrième ordre.

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a, b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au quatrième ordre.
On obtient alors

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{17}$$

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a,b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au quatrième ordre.
On obtient alors

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{17}$$

Cette approximation est d'ordre 2.

Exercice 3

Exercise 2.3

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{18}$$

Ecrire une fonction DERIVESECONDE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Plan

Intégration

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ donné. On propose de chercher une approximation de

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

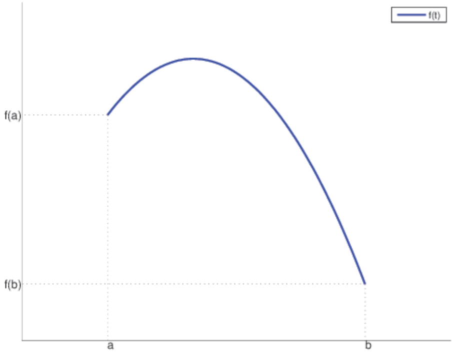


FIGURE – Représentation de la fonction f

Intégration

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ donné. On propose de chercher une approximation de

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

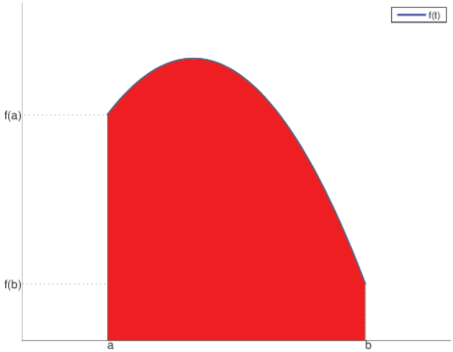


FIGURE – Représentation de $\int_a^b f(t)dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

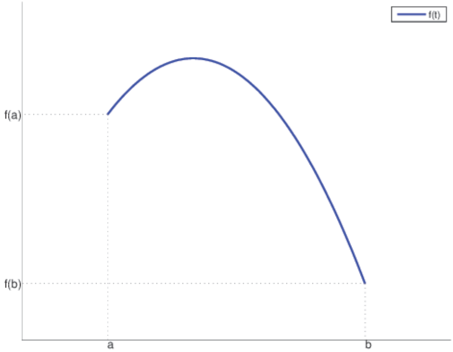


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

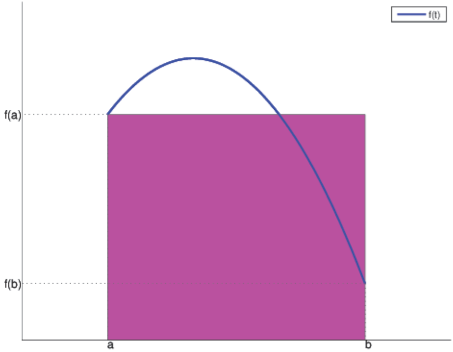


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

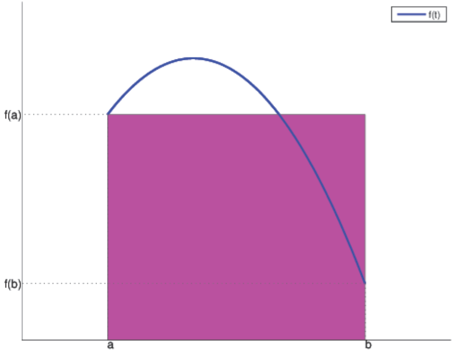


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(a),$$ formule du rectangle (à gauche)

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

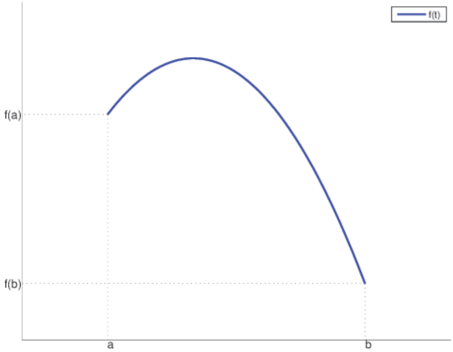


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

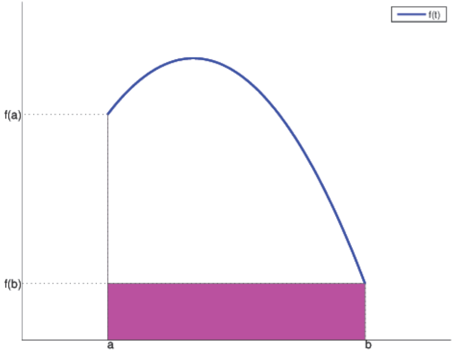


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

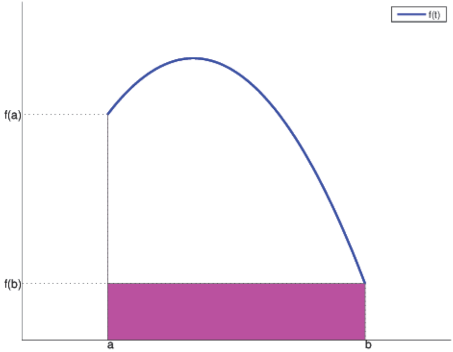


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(b),$$ formule du rectangle (à droite)

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a+b)/2$.

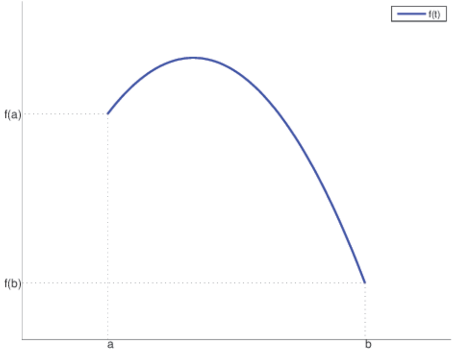


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a+b)/2$.

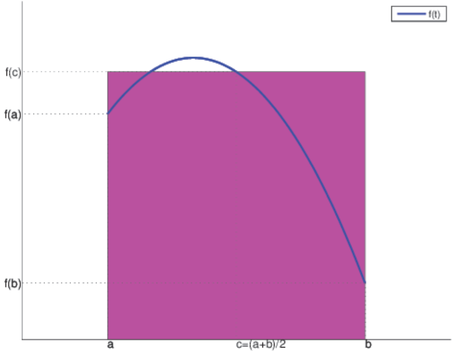


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a+b)/2$.

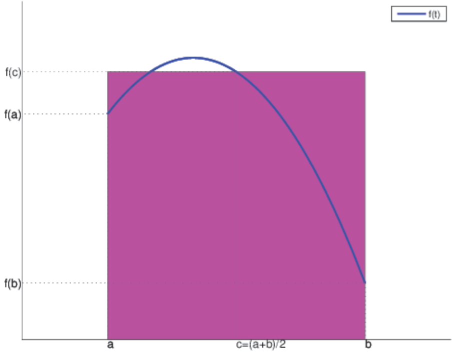


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}),$$ formule du point milieu

Méthodes de Newton-Cotes

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Méthodes de Newton-Cotes

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
2. On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ de degré n tel que
$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i),\ \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Méthodes de Newton-Cotes

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
2. On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ de degré n tel que
$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \ \forall i \in [\![0, n]\!].$$
$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} L_i(t) f(t_i)$$

Méthodes de Newton-Cotes

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
2. On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ de degré n tel que

$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \ \forall i \in [\![0, n]\!].$$

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} L_i(t) f(t_i)$$

3. On a alors

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b \mathcal{P}_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \int_a^b L_i(t)dt.$$

Méthodes de Newton-Cotes

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
2. On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ de degré n tel que
$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \ \forall i \in [\![0, n]\!].$$
$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} L_i(t) f(t_i)$$
3. On a alors
$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b \mathcal{P}_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \int_a^b L_i(t)dt.$$

Les formules de Newton-Cotes génériques :
$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i)$$

Méthodes de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_a^b L_i(t)dt$$

En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a

n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	ordre
1	$1/2$	1	1				trapèzes	1
2	$1/3$	1	4	1			Simpson	3
3	$3/8$	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3
4	$2/45$	7	32	12	32	7	Villarceau	5

Simpson : $\int_a^b f(t)dt \approx$

Méthodes de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_a^b L_i(t)dt$$

En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a

n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	ordre
1	$1/2$	1	1				trapèzes	1
2	$1/3$	1	4	1			Simpson	3
3	$3/8$	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3
4	$2/45$	7	32	12	32	7	Villarceau	5

Simpson : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

Méthodes de Newton-Cotes

Definition 3.1

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Theorem 5

Les formules de Newton-Cotes à $n+1$ points sont d'ordre n si n est impair et d'ordre $n+1$ sinon.

Méthodes de Newton-Cotes

Definition 3.1

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Theorem 6

Les formules de Newton-Cotes à $n + 1$ points sont d'ordre n si n est impair et d'ordre $n + 1$ sinon.

Attention

Du au phénomène de Runge, ces formules ne sont pas "fiables" pour des ordres élevés.

Méthodes composites

Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles. Soit $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_k = a + kh$ avec $h = (b-a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx hf(m_k)$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx hf(m_k)$$

Theorem 8

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(m_k) + \mathcal{O}(h^2).$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx hf(m_k)$$

Theorem 9

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(m_k) + \mathcal{O}(h^2).$$

Erreur d'ordre 2 (par rapport à h.)

Méthodes composites des points milieux : Exercice

Exercise 3.1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADPM permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des points milieux.

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx h(\frac{f(x_{k-1} + f(x_k))}{2})$$

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx h(\frac{f(x_{k-1} + f(x_k))}{2})$$

Theorem 11

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n}(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx h(\frac{f(x_{k-1} + f(x_k)}{2})$$

Theorem 12

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} (\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Erreur d'ordre 2 (par rapport à h.)

Méthodes composites des trapèzes : Exercice

Exercise 3.2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADTRAPEZE permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des trapèzes.

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$

Theorem 14

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$

Theorem 15

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Erreur d'ordre 4 (par rapport à h.)

Méthodes composites de Simpson : Exercice

Exercise 3.3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADSIMPSON permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite de Simpson.

Ordres (numériques) des méthodes composites

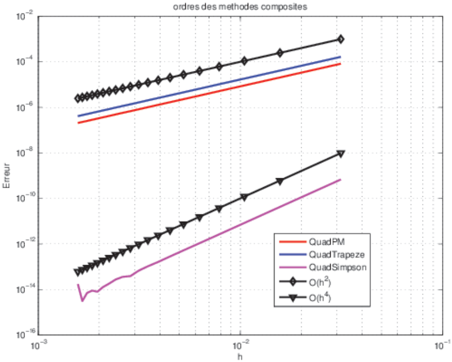


FIGURE – Ordre de l'erreur des méthodes composites

Exercise 3.4

Ecrire un programme Matlab permettant d'obtenir cette figure sachant qu'ici $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

Autres méthodes

Il existe un grand nombre de méthodes d’intégration numérique :

- Méthode de Gauss-Legendre
- Méthode de Gauss-Tchebychev
- Méthode de Gauss-Laguerre
- Méthode de Gauss-Hermitte
- Méthode de Gauss-Lobatto
- Méthode de Romberg...

Intégrales multiples

On veut approcher, en utilisant la formule de Simpson, l'intégrale

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx$$

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)dy \approx \tilde{g}(x) = \frac{d-c}{6}\left(f(x, c) + 4f(x, \frac{c+d}{2}) + f(x, d)\right).$$

On a

$$\begin{aligned} I = \int_a^b g(x)dx &\approx \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)\right) \\ &\approx \frac{b-a}{6}\left(\tilde{g}(a) + 4\tilde{g}(\frac{a+b}{2}) + \tilde{g}(b)\right) \end{aligned}$$

Intégrales multiples : formule de Simpson 2D

On pose $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = \frac{c+d}{2}$

$$I \approx \frac{b-a}{6}\frac{d-c}{6}\left(\begin{array}{l} f(a,c)+4f(a,\beta)+f(a,d) \\ +4(f(\alpha,c)+4f(\alpha,\beta)+f(\alpha,d)) \\ +f(b,c)+4f(b,\beta)+f(b,d) \end{array}\right)$$

Intégrales multiples : méthodes composites

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
2. Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in [\![0, m]\!]$, $y_l = a + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.

Intégrales multiples : méthodes composites

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
2. Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in [\![0, m]\!]$, $y_l = a + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.
3. Relation de Chasles :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x, y) dydx.$$

Intégrales multiples : méthodes composites

1. Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
2. Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in [\![0, m]\!]$, $y_l = a + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.
3. Relation de Chasles :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x, y) dy dx.$$

4. Formule de Simpson 2D :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \frac{h_x h_y}{36} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left(\begin{array}{l} f(x_{k-1}, y_{l-1}) + 4f(x_{k-1}, \beta_l) + f(x_{k-1}, y_l) \\ +4(f(\alpha_k, y_{l-1}) + 4f(\alpha_k, \beta_l) + f(\alpha_k, y_l)) \\ +f(x_k, y_{l-1}) + 4f(x_k, \beta_l) + f(x_k, y_l) \end{array} \right)$$

avec $\alpha_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ et $\beta_l = \frac{y_{l-1}+y_l}{2}$.

Plan