

TRAVAUX DIRIGÉS - 2

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

EXERCICE 1

Ecrire la fonction `LAGRANGE` permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Soit \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et \mathbf{X} un vecteur de \mathbb{R}^m .

1. Ecrire la fonction `LAGRANGEVEC` permettant de calculer le vecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

2. Evaluer le coût arithmétique de la fonction `LAGRANGEVEC` en fonction de n et m .

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n + 1$ points et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i)$, $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement f et \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(X_i, Y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) sur l'intervalle $[a, b]$.

On utilisera pour cela la fonction `PLOT` dont la syntaxe est `PLOT(x, y)` où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont des vecteurs de \mathbb{R}^k . Cette fonction relie successivement les points $(\mathbf{x}(j), \mathbf{y}(j))$, pour j allant de 1 à k , par des segments.

2 Dérivation numérique

EXERCICE 4

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4.1)$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

EXERCICE 5

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5.1)$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

EXERCICE 6

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6.1)$$

Ecrire une fonction DERIVESECONDE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.