AIR1 2015-2016

Méthodes Numériques I [a]

Travaux Pratiques N^o 3

•••••••

Dérivation numérique

[a]. Version du 6 avril 2016

Table des matières

1 Approximation de dérivées premières

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]\bar{x}, \bar{x}+h[$, $\exists \xi_- \in]\bar{x}-h, \bar{x}[$,tel que

$$\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \tag{1.1}$$

$$\frac{f(\bar{x})-f(\bar{x}-h)}{h} = f'(\bar{x}) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \tag{1.2}$$

- Ces formules sont des approximations de $f'(\bar{x})$ d'ordre 1 par rapport à h.
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h\}$ et $\{\bar{x}-h, \bar{x}\}$.

Q. 1 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.3}$$

Ecrire une fonction Derive1 *permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.4}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Une autre approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h, \bar{x}+2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h)-4f(\bar{x}+h)+3f(\bar{x})}{2h} + O(h^2). \tag{1.5}$$

Une autre approximation de $f'(\bar{x})$ à l'ordre 2 utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}-h, \bar{x}-2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x})-4f(\bar{x}-h)+f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.6}$$

Q. 2 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.7}$$

Ecrire une fonction Derive2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Q. 3 *Ecrire un programme, nommé* erreurDerive.m*, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 1.* ■

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisament régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, de l'intervalle $[a, b]$.

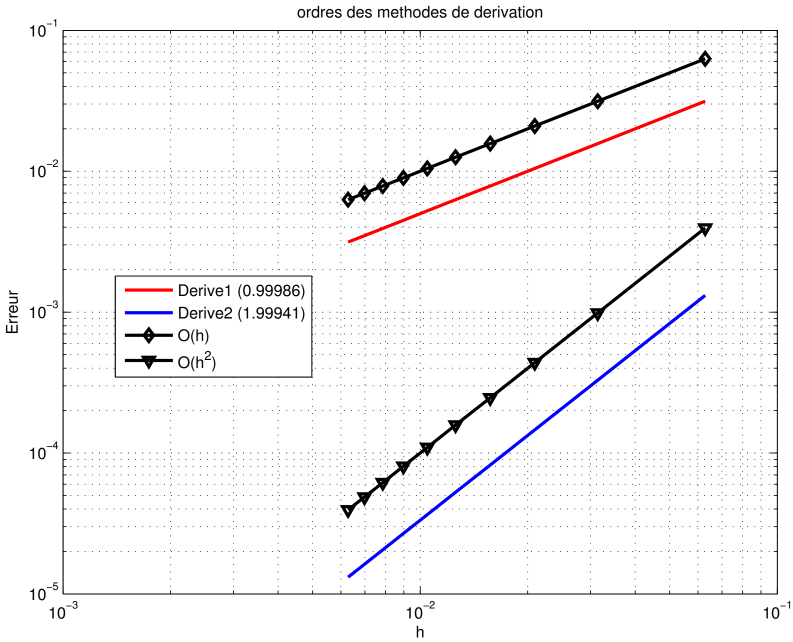

FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

En utilisant les formules de Taylor de de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au quatrième ordre, on abouti à

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.8}$$

On peut utiliser cette formule pour obtenir des approximations de la dérivée seconde de f en x_i, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$.

Il reste à déterminer des formules aux points $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Pour obtenir une formule aux points $x_0 = a$ on peut utiliser des formules de Taylor de de $f(\bar{x}+h)$, $f(\bar{x}+2h)$ et $f(\bar{x}+3h)$ jusqu'au quatrième ordre. On a :

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}+h) &= f(\bar{x}) + hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) && (2.9)\\
f(\bar{x}+2h) &= f(\bar{x}) + 2hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) && (2.10)\\
f(\bar{x}+3h) &= f(\bar{x}) + 3hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{(3h)^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(3h)^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) && (2.11)
\end{aligned}$$

En effectuant les combinaisons $2 \times (2.9) - (2.10)$ et $3 \times (2.9) - (2.10)$ on obtient respectivement les deux équations

$$\begin{aligned}
2f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}+2h) &= f(\bar{x}) - h^2 f^{(2)}(\bar{x}) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4)\\
3f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}+3h) &= 2f(\bar{x}) - 3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

d'où les deux formules d'ordre 1

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}) - 2f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+2h)}{h^2} - hf^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2) && (2.12)\\
f^{(2)}(\bar{x}) &= \frac{2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+3h)}{3h^2} - \frac{4}{3}hf^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2) && (2.13)
\end{aligned}$$

En effectuant la combinaison $4 \times (2.12) - 3(2.13)$, on obtient la formule d'ordre 1

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\bar{x}) &= 4\frac{f(\bar{x}) - 2f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+2h)}{h^2} - 3\frac{2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}+3h)}{3h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}+h) + 4f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x}+3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

On prendra comme approximation d'ordre 2

$$f^{(2)}(a) \approx \frac{2f(a) - 5f(a+h) + 4f(a+2h) - f(a+3h)}{h^2}.$$

Q. 4 *Montrer que l'on a*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}-h) + 4f(\bar{x}-2h) - f(\bar{x}-3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.15}$$

En déduire une approximation de $f^{(2)}(b)$. ■

Q. 5 *Ecrire une fonction* DERIVESEC2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de* $f^{(2)}(x_i)$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$. ■

Q. 6 *Ecrire un programme, nommé* ERREURDERIVESECONDE.M, *permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2.* ■

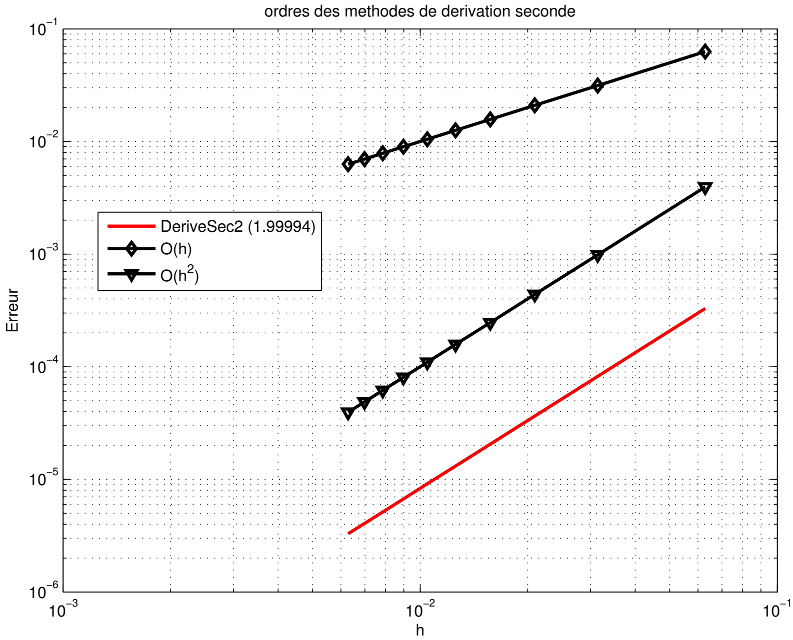

FIGURE 2 – Ordre de l'erreur de l'approximation de la dérivée seconde