Exo 1

Q1) ① $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}^*$, ($m \in \mathbb{N}^*$)

② Données : $x \in \mathbb{R}$

V un tableau de m réels tq $V(i) = v_i$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$

$n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : $y \in \mathbb{R}$

```
Fonction y ← PS(x, V, n)
   y ← 1
   pour i ← 1 à m faire
   |   S ← 0
   |   pour k ← 1 à n faire
   |   |  S ← S + k + (x - i)^2
   |   fin
   |   y ← y * (V(i) + cos(x) * S)
   fin
fin
```

③ $m = 2$ $x = \pi/3$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $n = 5$ (jeu de données)

$y \leftarrow PS(\pi/3, [2 \ \ 3], 5)$

Q2) ① $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^p$ ($m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$)

② Données : $x \in \mathbb{R}$

V un tableau de m réels tq $V(i) = v_i$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$

V un tableau de p réels tq $V(i) = v_i$ $\forall i \in [\![1,p]\!]$

Résultat : Z un tableau de m réels tq $Z(i) = z_i$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$

Fonction $Z \leftarrow SP(x, U, V)$

pour $i \leftarrow 1$ à m faire
  $Z(i) \leftarrow 0$
  pour $k \leftarrow 1$ à p faire
    $P \leftarrow 1$
    pour $j \leftarrow 1$ à p faire
      $P \leftarrow P * (V(k) + (x-j)^{\wedge}2$
    fin
    $Z(i) \leftarrow Z(i) + U(i) + \cos(k*x)*P$
  fin
fin
fin

③ $x = \pi/2$ $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(m=2, p=3)$

$Z \leftarrow SP(\pi/2, [2,3], [1,2,3])$

Exo 2

Q1) voir "Notes de cours" page 19

Q2) Données

X : tableau de $n+1$ réels tq $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$
Y : " $Y(i) = y_{i-1}$ "

alpha : tableau de m réels tq $alpha(i) = \alpha_i$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$

résultat
beta : tableau de m réels tq $beta(i) = \beta_i$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$

Fonction beta ← LagrangeVec(alpha, X, Y)
  pour $i \leftarrow 1$ à m
    beta(i) ← Lagrange(alpha(i), X, Y)
  fin
Fin

Exo 3

Q1) 1pt : $\int_{-1}^{1} u(s)\,ds \approx 2u(0)$

2 pts : $\int_{-1}^{1} u(s)\,ds \approx u(-\sqrt{1/3}) + u(\sqrt{1/3})$

3 pts : $\int_{-1}^{1} u(s)\,ds \approx \frac{5}{9}u(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}u(0) + \frac{5}{9}u(\sqrt{3/5})$

Q2) 1pt : $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,dt \approx \frac{\beta-\alpha}{2} \times 2 g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\times 0 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

(A) 2pt : $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,dt \approx \frac{\beta-\alpha}{2}\left(g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\times(-\sqrt{1/3}) + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\times\sqrt{1/3} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$

3pt : $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,dt \approx \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\frac{5}{9} g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\times(-\sqrt{3/5}) + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{8}{9} g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{5}{9} g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\times\sqrt{3/5} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$

Q3) ① $x_i = a + ih \quad \forall i \in [\![0, N]\!]$ avec $h = \frac{b-a}{N}$

② Données $a \in \mathbb{R}$
$b \in \mathbb{R} \quad a < b$
$N \in \mathbb{N}^*$

Resultat X un tableau de $N+1$ réels tq $X(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in [\![1, N+1]\!]$

```
Fonction X ← DisReg(a, b, N)
   h ← (b-a)/N
   pour i ← 1 à N+1 faire
   |  X(i) ← a + (i-1)*h
   Fin
Fin
```

Q4) ① Les méthodes composites sont basées sur la formule de Chasles appliquées à la discrétisation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Pour la méthode composite de Gauss à 2 points, chacune des intégrales est approchée par la formule de Gauss à 2 points (A) :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

(on a $\beta - \alpha = x_{i+1} - x_i = h$ et $\frac{\beta+\alpha}{2} = x_i + \frac{h}{2}$)

On obtient alors

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right) = I_h \qquad (B)$$

② Données : $a \in \mathbb{R}$
$b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$
$N \in \mathbb{N}^*$
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Resultat : $I \in \mathbb{R}$

```
Fonction  I ← QuadGauss ( f, a, b, N )
    X ← DisReg ( a, b, N )
    h ← ( b - a ) / N
    am ←  (h/2)*(1 - sqrt(1/3))
    ap ←  (h/2)*(1 + sqrt(1/3))

    I ← 0
    pour  i ← 1  à  N  faire
      | I ← I + f( X(i) + am ) + f( X(i) + ap )
    fin
    I ← I * h / 2
Fin
```

Q5) ① Il va falloir mesurer l'erreur entre une intégrale et son approximation. il faut donc pouvoir calculer explicitement l'intégrale. On peut choisir par exemple $f(x) = \sin(x)$ $a = 0$ et $b = \pi$ d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$$

Pour différentes discrétisations (i.e. différentes valeurs de N et donc différentes valeurs de h), on va calculer I_h (approximation par la méthode composite de Gauss à 2pts donnée en (B)) et l'erreur sera $E(h) = | I_h - 2 |$. Or dans le sujet, on nous dit que $E(h) = Ch^{2n+2}$ avec $n=2$ i.e $E(h) = Ch^6$.

Pour retrouver l'ordre de l'erreur (i.e 6), on peut vérifier qu'en échelle logarithmique $E(h)$ est une droite de pente ~ 6.

(2)

```
f = @(x) sin(x);
a = 0; b = pi;
Iex = 2;

k = 1;
for N = 100:100:1000
    E(k) = abs( QuadGauss(f,a,b,N) - Iex );
    H(k) = (b-a)/N;
    k = k+1;
end
loglog( H, E, 'b', H, H.^6, 'k')     % representation graphique

pente = ( log(E(end)) - log(E(1)) )/( log(H(end)) - log(H(1)) )   % calcul de l'ordre
                                                                   numeriquement
```