

EXAMEN DU 11 JUIN 2015
durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

EXERCICE 1 : 7 points

Soient t, x deux réels, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur de \mathbb{R}^p et $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$ un vecteur de \mathbb{R}^q .

Le réel z est donné par

$$z = \sum_{l=1}^n \left((u_l + lx) \prod_{k=1}^m (l + \cos(x - \pi/k)) \right)$$

- Q. 1**
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer z ? Préciser les types et les dimensions.
 2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer z . Toutes les données seront passées en arguments à la fonction.
 3. Ecrire un programme (complet) utilisant cette fonction. ■

Soit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le vecteur de \mathbb{R}^n défini par

$$y_i = \prod_{k=1}^p \left((u_i + kx) \sum_{j=1}^q (v_k + (t + j)) \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

- Q. 2**
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer \mathbf{y} ? Préciser les types et les dimensions.
 2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer \mathbf{y} . Toutes les données seront passées en arguments à la fonction.
 3. Ecrire un programme (complet) utilisant cette fonction. ■

EXERCICE 2 : 6 points

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{1}$$

- Q. 1 (algorithmique)** Ecrire une fonction **DISREG** permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. ■

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1 (Taylor-Lagrange) On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $\bar{x} \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} + h$ appartienne à I , on a

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2}$$

- Q. 2 (mathématiques)**
1. En utilisant (1) et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i-1} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

2. En utilisant (1) et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i+2} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$,

$$f'(x_i) = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

3. En utilisant (1) et les formules de Taylor en x_{i-1} et x_{i-2} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (5)$$

Q. 3 (algorithmique) A partir des formules précédentes, écrire une fonction `DERIVE2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ à partir de l'ensemble des y_i , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ■

EXERCICE 3 : 7 points

Soit g une fonction régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Les **formules de Newton-Cotes** permettent d'approcher l'intégrale de g sur $[\alpha, \beta]$. Elles s'écrivent sous la forme générique

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \approx \sum_{i=0}^m \mu_i g(t_i) \quad (1)$$

où $(t_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et l'on note h son pas de discrétisation. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a le tableau suivant donnant les 3 premières formules

m	C	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	ordre
2	1/3	1	4	1			3
3	3/8	1	3	3	1		3
4	2/45	7	32	12	32	7	5

Q. 1 Donner les formules explicites permettant de calculer h et l'ensemble des t_i en fonction de α , β et m . ■

Q. 2 A partir du tableau précédent, écrire explicitement la formule de Newton-Cotes avec $m = 3$ permettant le calcul d'une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$. ■

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note x_k , $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \quad (2)$$

Q. 3 1. Expliquer le principe de la méthode **composite** utilisant la formule de Newton-Cotes avec $m = 3$ pour le calcul des différentes intégrales de (2).

2. Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab) `QUADCOMPNC` permettant de retourner cette approximation. ■

Q. 4 Ecrire un programme (script) permettant de calculer une approximation de $\int_0^{\pi/4} \sin(3t \cos(t))dt$ en utilisant la fonction `QUADCOMPNC`. ■