Examen du 7 juin 2016

durée : 2h.

Sans documents et sans calculatrice

Les paramètres d'entrées (données) et de sortie (résultats) de toutes les fonctions algorithmiques devront être décrits précisemment.

Exercice 1 : Produits et sommes (4 points)

Soient t, x deux réels, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Soit y le réel défini par

$$s = \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(u_k + x) \prod_{j=1}^{p} \sin(kv_j) \right).$$

Q. 1 1. *Ecrire la fonction* ***SP*** *permettant de calculer s. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

2. *Ecrire un algorithme (complet) utilisant cette fonction.* ▪

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\boldsymbol{z}_i = \prod_{j=1}^{p} \left((v_j + i\pi) \sum_{k=1}^{m} \sin((j-k)\pi t) \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Q. 2 1. *Ecrire la fonction* ***PS*** *permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

2. *Ecrire un algorithme (complet) utilisant cette fonction.* ▪

Exercice 2 : Dérivation (8 points)

On note $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ en $n + 1$ points. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose les y_i donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.1}$$

Q. 1 (algorithmique) *Ecrire une fonction* DisReg *permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.* ▪

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1 (Taylor-Lagrange) *On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\bar{x} \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} + h$ appartienne à I, on a*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2.2}$$

▪

Q. 2 (mathématiques) 1. *En utilisant* (2.1) *et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i-1}, montrer que, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$,*

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.3}$$

2. *En utilisant* (2.1) *et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i+2}, montrer que, $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$,*

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.4}$$

3. En utilisant (2.1) et les formules de Taylor en x_{i-1} et x_{i-2}, montrer que, $\forall i \in [\![2, n]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.5}$$

■

Q. 3 (algorithmique) *A partir des formules précédentes, écrire une fonction* DERIVE2 *permettant de retourner des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Q. 4 (algorithmique) *Soit $f(x) = \cos(3x^2 - \sin(2x^2 - 1))$. En utilisant au mieux les fonctions déjà écrites, écrire un algorithme complet permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de la dérivée de f aux 51 points de la discrétisation régulière de $[0, \pi/2]$.* ■

EXERCICE 3 : Interpolation (8 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

avec

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Théorème 2 *Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{3.3}$$

■

Q. 1 *Ecrire la **fonction** `Lagrange` permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.* ■

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Ecrire la **fonction** `LagrangeVec` permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

■

Q. 3 *Les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ sont donnés par*

$$z_k = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \ \forall k \in [\![0, n]\!]. \tag{3.4}$$

Ecrire la fonction `Tchebycheff` permettant de calculer ces $n+1$ points. ■

Q. 4 *Soient $a = -1$, $b = 1$, $f : t \mapsto \sin(t^2)$, et $n = 11$. On note $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ et $\boldsymbol{z} = (z_0, \ldots, z_n)$ respectivement les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ et les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a, b]$. On note $y_i = f(x_i)$, $\quad w_i = f(z_i)$ $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Ecrire un algorithme complet permettant de calculer au point $t = \pi/3$*

- *le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$*
- *le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les $n+1$ points $(z_i, w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$* ■