TRAVAUX DIRIGÉS - 2

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

EXERCICE 1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) au point $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

2. Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de n et m.

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ la dicrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n+1$ points et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i), \ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$.

Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement f et $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(X_i, Y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) sur l'intervalle $[a, b]$.

On utilisera pour celà la fonction PLOT dont la syntaxe est `PLOT(x,y)` où `x` et `y` sont des vecteurs de $\mathbb{R}^k$. Cette fonction relie successivement les points `(x(j),y(j))`, pour j allant de 1 à k, par des segments.

2 Dérivation numérique

EXERCICE 4

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{4.1}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

EXERCICE 5

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5.1}$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

EXERCICE 6

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6.1}$$

Ecrire une fonction DERIVESECONDE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.