AIR1 *2016-2017*

Méthodes Numériques I [a]

Travaux Pratiques N^o 2

•••••••

Polynômes d'interpolation de Lagrange

a. Version du 19 septembre 2016

Table des matières

1 Rappels théoriques

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Théorème 1 *Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{3}$$

2 Première approche matlab

Exercice 1 (Matlab) *Ecrire la fonction* LAGRANGE *permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$ basée sur la formule (1).*

Exercice 2 (Matlab) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ la dicrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$ avec $n+1$ points et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i)$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$.*

1. *Ecrire le programme `prog1` permettant de représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à (X, Y) et la fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.*
2. *Utiliser les jeux de données suivants pour reproduire les figures 1 et 2 données en annexe.*
   (a) $a = -1$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ *et faire varier* $n = 5, 11...$
   (b) $a = 0$, $b = \pi$, $f : x \mapsto \cos(x)$, $\alpha = -1$, $\beta = 4$ *et faire varier* $n = 5, 20, 28...$

3 Vectorisation

Exercice 3 (Algorithme) *Soient $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $\boldsymbol{t}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.*

1. *Ecrire la fonction* LAGRANGEVEC *permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$z_i = \mathcal{P}_n(t_i), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

2. *Evaluer le coût arithmétique de la fonction* LAGRANGEVEC *en fonction de n et m.*

Exercice 4 (Matlab) *Transformer le programme `prog1` de l'exercice 2 en un nouveau programme `prog2` utilisant la fonction* LAGRANGEVEC.

3.1 Un peu d'analyse numérique

Dans cette partie, on va regarder la possibilité d'améliorer les performances, en terme de coût arithmétique, de la fonction LagrangeVec.

Exercice 5 (Analyse numérique (facultatif)) *1. Soit v le polynôme de degré $n+1$ défini par*

$$v(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$$

Montrer que,

$$v'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j), \ \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{4}$$

2. *Calculer $L_i(t)$ en fonction de $v(t)$ et $v'(x_i)$. En déduire que, $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,*

$$\mathcal{P}_n(t) = v(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(t - x_i)v'(x_i)}.$$

3. *Démontrer que*

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(t) = 1, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

En déduire que, $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,

$$\mathcal{P}_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(t-x_i)v'(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(t-x_i)v'(x_i)}}. \tag{5}$$

3.2 Algorithme optimisé

Exercice 6 (Algorithme) *Soit $\boldsymbol{t}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.*

1. *Ecrire la fonction* LagrangeVecOpt *permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$z_j = \mathcal{P}_n(t_j), \ \ \forall j \in [\![1, m]\!]$$

en utilisant au mieux[1] *la formule (5).*

2. *Donner le coût arithmétique de la fonction* LagrangeVecOpt *en fonction de n et m.*

Exercice 7 (Matlab) *1. Ecrire la fonction* LagrangeVecOpt *correspondant à l'exercice 6.*

2. *Ecrire un programme* `prog3` *similaire à* `prog2` *mais utilisant la fonction* LagrangeVecOpt.
3. *Comparer les programmes* `prog2` *et* `prog3` *avec m assez grand ($m = 4000$ par exemple) en utilisant l'outil Matlab* ***Profiler****. (Quelques captures d'écran sont fournies en Annexe : figures 3 et 4)*

1. $v'(x_i)$ ne doit être calculé qu'une seule fois !

4 Points de Tchebycheff

Soient a et b deux réels, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. Les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a, b]$ sont donnés par

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

Exercice 8 (Matlab) *1. Ecrire la fonction* TCHEBYCHEFF *permettant de calculer les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a, b]$.*

2. Ecrire le programme `comparaison` *permettant de comparer les polynômes de Lagrange avec points distribués uniformément et points de Tchebycheff. On peut prendre comme jeu de données $a = -1$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1/(1+25x^2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $n = 11$. Des exemples de figures sont donnés en Annexe (figures 5 et 6).*

5 Annexe

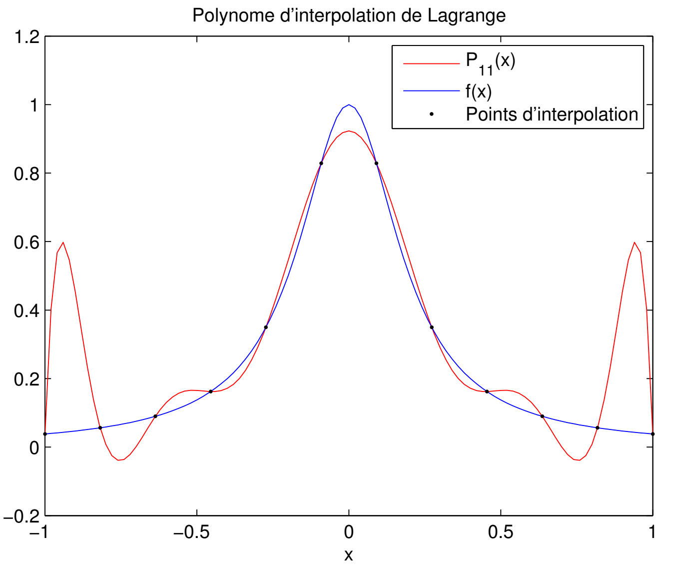

FIGURE 1: graphique obtenu à l'aide de `prog1` (exercice 2)

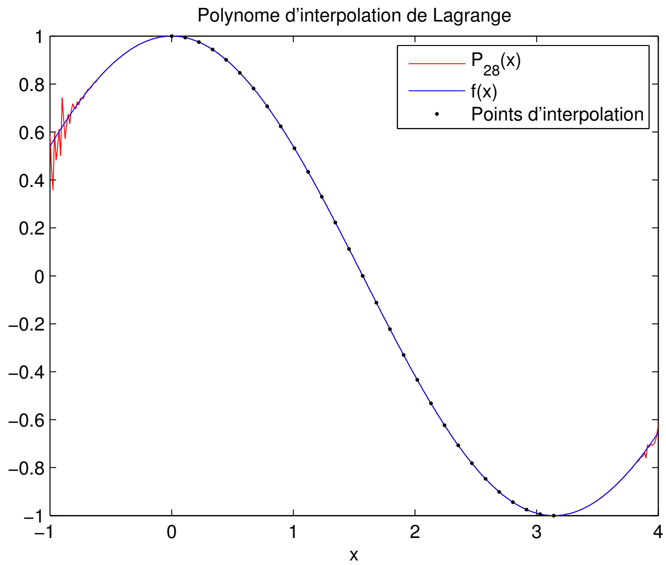

FIGURE 2: graphique obtenu à l'aide de `prog1` (exercice 2)

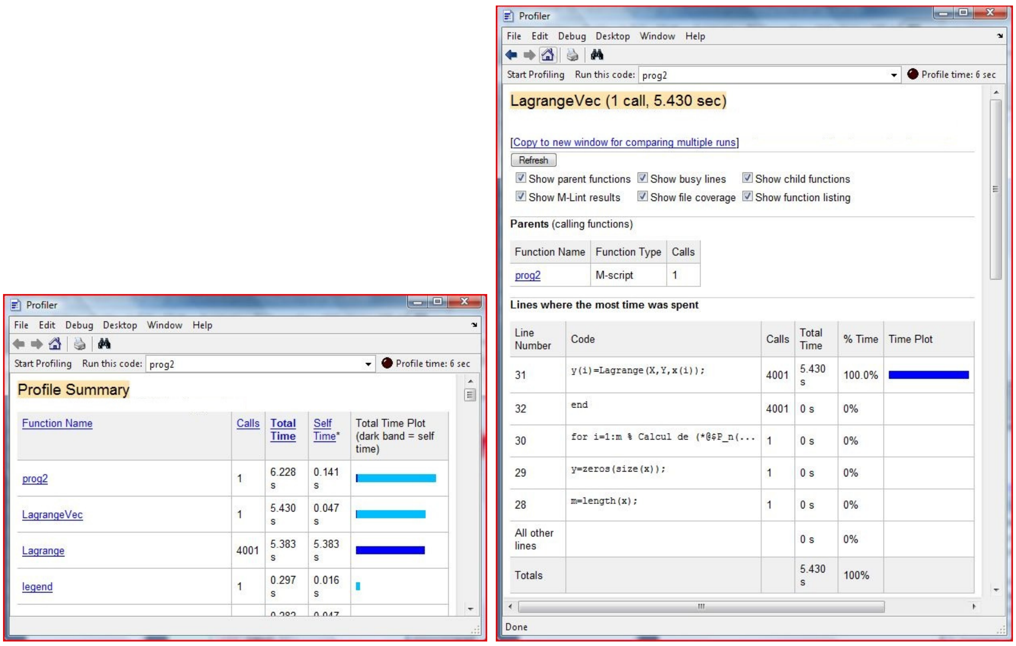

FIGURE 3: Profiler avec `prog2` (non optimisé), $m = 4000$

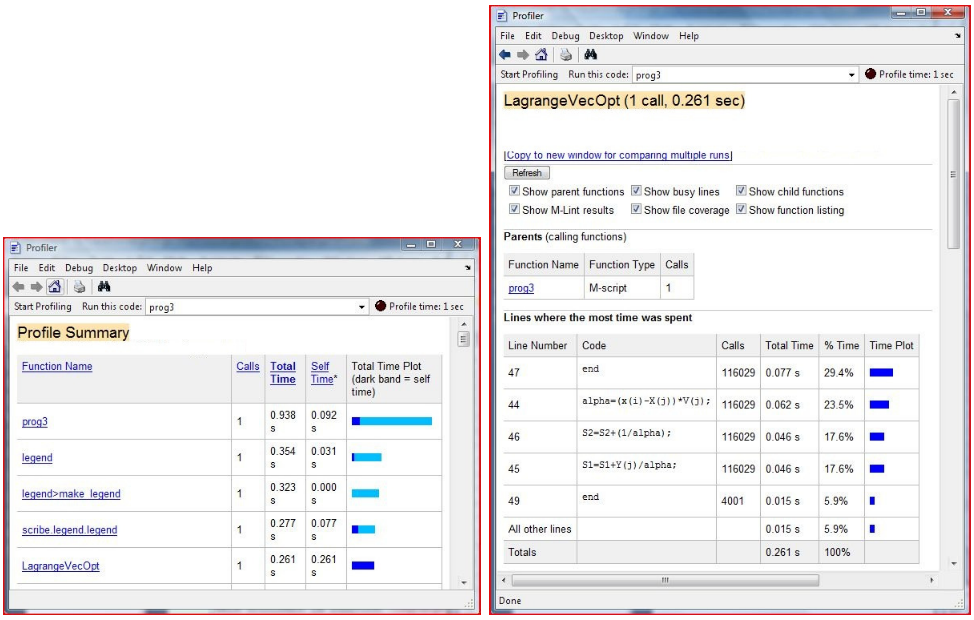

FIGURE 4: Profiler avec `prog3` (optimisé), $m = 4000$

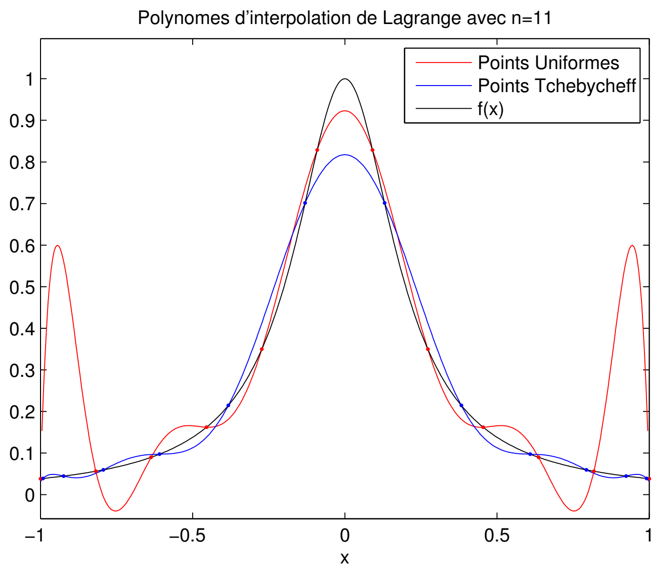

FIGURE 5: `prog3` avec $n = 11$

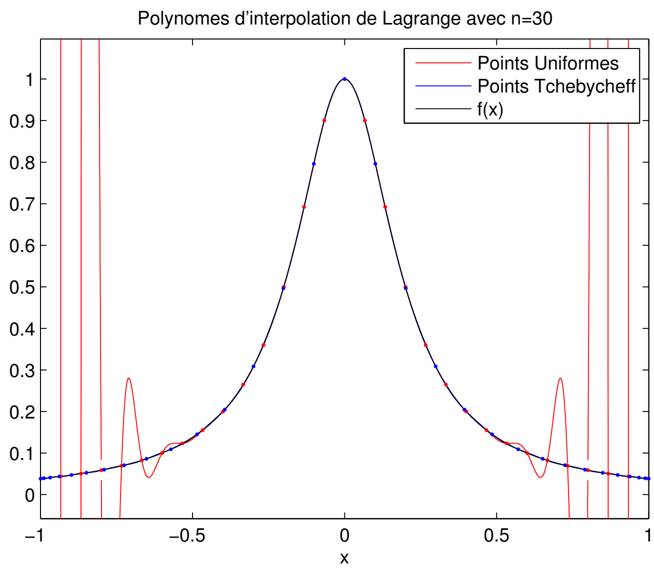

FIGURE 6: `prog3` avec $n = 30$