

Méthodes Numériques I^a

Travaux Pratiques N^o 5

•••••

Algèbre linéaire^b

^aVersion du November 30, 2016

^bversion en cours de rédaction

Un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est un *objet* mathématique contenant n nombres réels et l'on note

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, u_i est un réel et on dit que u_i est la i -**ème composante du vecteur \mathbf{u}** .

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un *objet* mathématique contenant $m \times n$ nombres réels *rangés* en m lignes et n colonnes et l'on note

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,j}$ est un réel et on dit que $A_{i,j}$ est la **composante (i, j) de la matrice \mathbb{A}** et elle est située en ligne i et colonne j .

1 Opérations élémentaires

1.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Le produit scalaire du vecteur \mathbf{u} par le vecteur \mathbf{v} est un nombre réel noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et défini par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (3)$$

Exercice 1. 1. *Ecrire la fonction PS permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.*

2. *Ecrire un programme permettant de valider cette fonction. On pourra pour cela utiliser la fonction DOT de Matlab.*

1.2 Normes d'un vecteur

Soit \mathbf{u} un vecteur de \mathbb{R}^n . La norme usuelle du vecteur \mathbf{u} (correspondant à la mesure d'une *distance*) est le nombre réel positif $\|\mathbf{u}\|_2$ défini par

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

On peut aussi noter que $\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$.

De manière plus générale, la norme p du vecteur \mathbf{u} , $p \geq 1$, est le nombre réel positif noté $\|\mathbf{u}\|_p$ défini par

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Enfin la norme dite *infini* du vecteur \mathbf{u} est le nombre réel positif noté $\|\mathbf{u}\|_\infty$ et défini par

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |u_i|. \quad (6)$$

Exercice 2. 1. *Ecrire les fonctions `NORME` et `NORMEINF` permettant de calculer respectivement la norme p et la norme infini d'un vecteur.*

2. *Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions. On pourra pour cela utiliser la fonction `NORM` de Matlab.*

1.3 Produit matrice-vecteur

Soient \mathbb{A} une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et \mathbf{u} un vecteur de \mathbb{R}^p . Le produit de la matrice \mathbb{A} par le vecteur \mathbf{u} n'est défini que si le nombre de colonne de \mathbb{A} est égale au nombre de ligne de \mathbf{u} i.e.

$$n = p$$

Dans ce cas le produit de \mathbb{A} par \mathbf{u} , noté $\mathbb{A}\mathbf{u}$, est un vecteur de \mathbb{R}^m , m étant le nombre de ligne de \mathbb{A} . Le vecteur résultat $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$ de \mathbb{R}^m est alors donné par

$$\forall i \in [1, m], \quad v_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} u_j. \quad (7)$$

En définissant $\mathbf{A}_{i,:}$ comme étant le i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} , on a la relation utilisant le produit scalaire de la i -ème ligne de \mathbb{A} avec le vecteur \mathbf{u}

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} u_j = \langle \mathbf{A}_{i,:), \mathbf{u} \rangle.$$

Exercice 3. 1. *Ecrire la fonction `PRODMATVEC` permettant de calculer le produit d'une matrice par un vecteur*

2. *Ecrire un programme permettant de valider cette fonction.*

1.4 Produit matrice-matrice

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit de la matrice \mathbb{A} par la matrice \mathbb{B} , noté $\mathbb{A}\mathbb{B}$, n'est défini que si le nombre de colonne de \mathbb{A} est égale au nombre de ligne de \mathbb{B} i.e.

$$n = p$$

Dans ce cas le produit de \mathbb{A} par \mathbb{B} est une matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$, m étant le nombre de ligne de \mathbb{A} et q le nombre de colonne de \mathbb{B} . La matrice résultat $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ est alors donné par

$$\forall i \in [1, m], \quad \forall j \in [1, q] \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}. \quad (8)$$

Attention le produit de \mathbb{A} par \mathbb{B} est différent du produit de \mathbb{B} par \mathbb{A} dans le cas général!

- En notant par $\mathbf{A}_{i,:}$ le i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} et en notant par $\mathbf{B}_{:,j}$ le j -ème vecteur colonne de \mathbb{B} , on a alors la relation

$$\sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = \langle \mathbf{A}_{i,:}, \mathbf{B}_{:,j} \rangle.$$

- On peut aussi noter que j -ème vecteur colonne de \mathbb{C} est le produit de la matrice \mathbb{A} par le j -ème vecteur colonne de \mathbb{B} :

$$\mathbf{C}_{:,j} = \mathbb{A} \mathbf{B}_{:,j}.$$

Exercice 4. 1. Ecrire la fonction `PROD MAT MAT` permettant de calculer le produit de deux matrices
 2. Ecrire un programme permettant de valider cette fonction.

2 Résolution de systèmes linéaires particuliers

2.1 Matrice diagonale

2.2 Matrice triangulaire inférieure

2.3 Matrice triangulaire supérieure

3 Méthode de Gauss