

TRAVAUX PRATIQUES - CONTRÔLE DU 11 JUIN 2015

Durée : 1h30

Remarques importantes

- Les trois parties sont indépendantes.
- Tous les codes demandés seront écrits dans le langage Matlab.
- Aucun document autorisé.
- Aucun échange de documents.
- Aucune communication entre étudiants.

EXERCICE 1 : Integration (7 points)

Soit f une fonction définie et suffisamment régulière sur l'intervalle $[a, b]$. Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles. On note $(x_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_k = a + kH$ avec $H = (b - a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \quad (1.1)$$

Les formules de Newton-Cotes génériques sont données par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \approx \sum_{i=0}^m \mu_i f(t_i).$$

Avec $t_i = \alpha + ih$, $\forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ et $h = (\beta - \alpha)/m$. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a

m	C	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	degré exactitude	ordre de l'erreur
1	1/2	1	1				trapèzes	1	2
2	1/3	1	4	1			Simpson	3	4
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3	4
4	2/45	7	32	12	32	7	Villardeau	5	6

On choisi d'approcher chacune des intégrales de (1.1) par la formule de Simpson 3/8 ($m = 3$).

Théorème 1 Soit f une fonction définie et suffisamment régulière sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode **composite** de Simpson 3/8 a pour **degré d'exactitude 3** : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(H^4)$: elle est donc d'ordre 4. ■

Q. 1 Ecrire la **fonction QuadCompNC** permettant de retourner l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode **composite** utilisant la formule de Newton-Cotes avec $m = 3$ ■

On va vérifier, pour l'approximation précédente, le degré d'exactitude. On rappelle par exemple que $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

Q. 2 Ecrire un **programme** permettant de vérifier le degré d'exactitude. ■

EXERCICE 2 : Interpolation (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté \mathcal{P}_n , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Théorème 2 Le *polynôme d'interpolation de Lagrange*, \mathcal{P}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.3)$$

Q. 1 Ecrire la *fonction Lagrange* permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

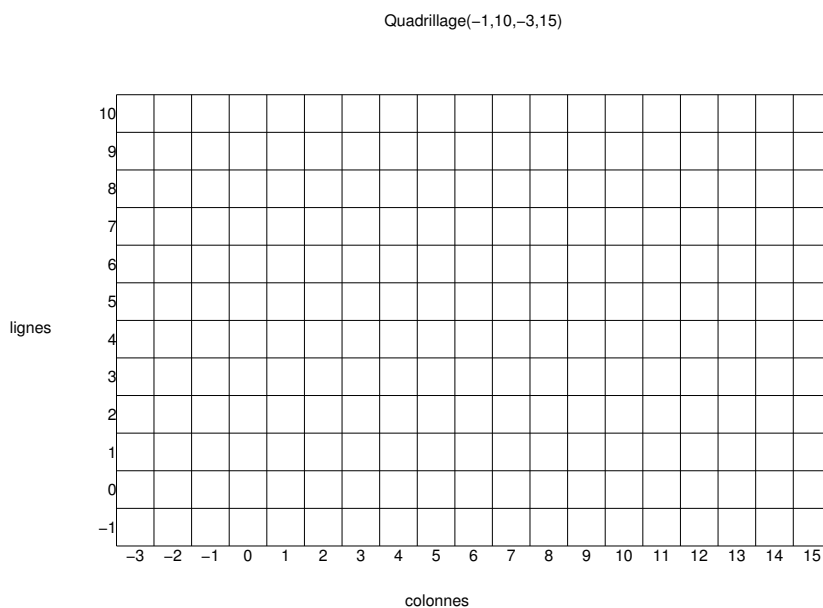
Q. 2 Soit α un vecteur de \mathbb{R}^m . Ecrire la *fonction LagrangeVec* permettant de calculer le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Q. 3 Soient $a = -\pi$, $b = \pi$, $f : t \mapsto \cos(t^2)$, et $n = 7$. On note $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n + 1$ points et $y_i = f(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ecrire le *programme prog1* permettant de représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et la fonction f sur l'intervalle $[-4, 4]$.

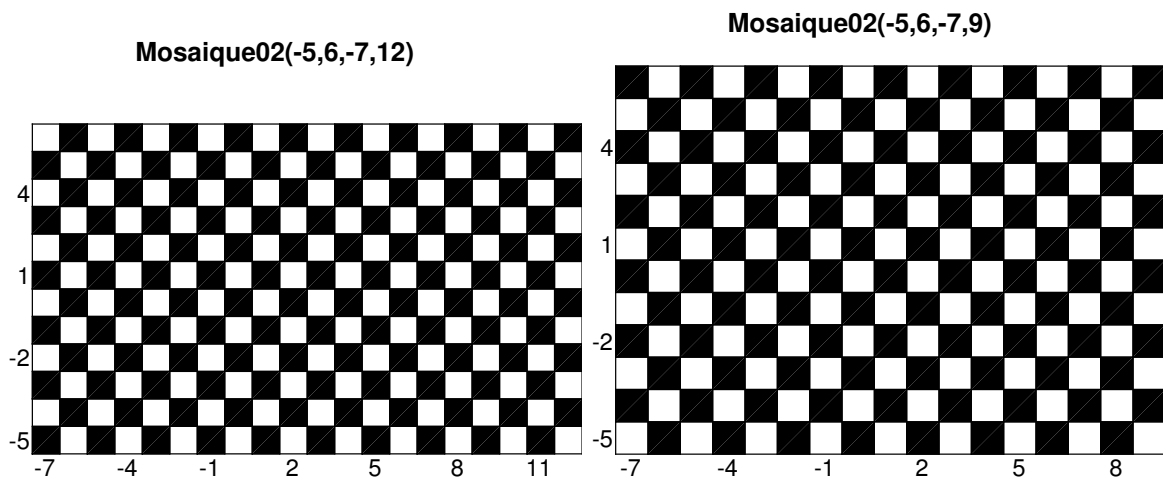
EXERCICE 3 : Mosaïque (6 points)

On dispose d'un quadrillage **quelconque** généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Q. 1 Ecrire une fonction *Mosaïque02* permettant de créer un damier quelconque sachant que le pavé en haut à droite d'un quadrillage est noir. Voici deux exemples :



N.B. La numérotation des lignes et des colonnes sur les figures précédentes n'est pas à programmer.