

TRAVAUX PRATIQUES - CONTRÔLE DU 7 JUIN 2015

Durée : 2h00

Remarques importantes

- Les trois parties sont indépendantes.
- Tous les codes demandés seront écrits dans le langage Matlab.
- Aucun document autorisé.
- Aucun échange de documents.
- Aucune communication entre étudiants.

EXERCICE 1 : Integration (10 points)

Soit f une fonction définie et suffisamment régulière sur l'intervalle $[a, b]$. Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles. On note $(x_k)_{k \in [0, n]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_k = a + kH$ avec $H = (b - a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \quad (1.1)$$

Les formules de Newton-Cotes génériques sont données par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \approx \sum_{i=0}^m \mu_i f(t_i).$$

Avec $t_i = \alpha + ih$, $\forall i \in [0, m]$ et $h = (\beta - \alpha)/m$. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a

| m | C | w_0 | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | nom | degré exactitude | ordre de l'erreur |
|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|------------------|-------------------|
| 1 | 1/2 | 1 | 1 | | | | trapèzes | 1 | 2 |
| 3 | 3/8 | 1 | 3 | 3 | 1 | | Simpson (3/8) | 3 | 4 |
| 4 | 2/45 | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 | Villarceau | 5 | 6 |

On choisit d'approcher chacune des intégrales de (1.1) par la formule de Simpson 3/8 ($m = 3$).

Théorème 1 Soit f une fonction définie et suffisamment régulière sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode **composite** de Simpson 3/8 a pour **degré d'exactitude** 3 : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(H^4)$: elle est donc d'ordre 4. ■

Q. 1 Ecrire la **fonction** `QuadSimpson38` permettant de retourner l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode **composite** utilisant (1.1) et la formule de Newton-Cotes avec $m = 3$ ■

La formule composite de Simpson est, quant à elle, donnée par

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{H}{6} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(H^4). \quad (1.2)$$

où m_k est le point milieu de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. Le degré d'exactitude de cette formule est 3.

Q. 2 Ecrire la **fonction** `QuadSimpson` permettant de retourner l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode **composite** (1.2). ■

On va vérifier le degré d'exactitude des formules composite précédentes. On rappelle par exemple que $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

Q. 3 Ecrire un **programme** permettant de vérifier le degré d'exactitude des méthodes composites de Simpson et de Simpson 3/8. ■

On va maintenant vérifier l'ordre de la méthode. On rappelle par exemple que $\int_a^b \sin(x)dx = \cos(a) - \cos(b)$.

Q. 4 Ecrire un **programme** permettant de vérifier graphiquement l'ordre des deux méthodes composites précédentes. ■

EXERCICE 2 : Graphisme (6 points)

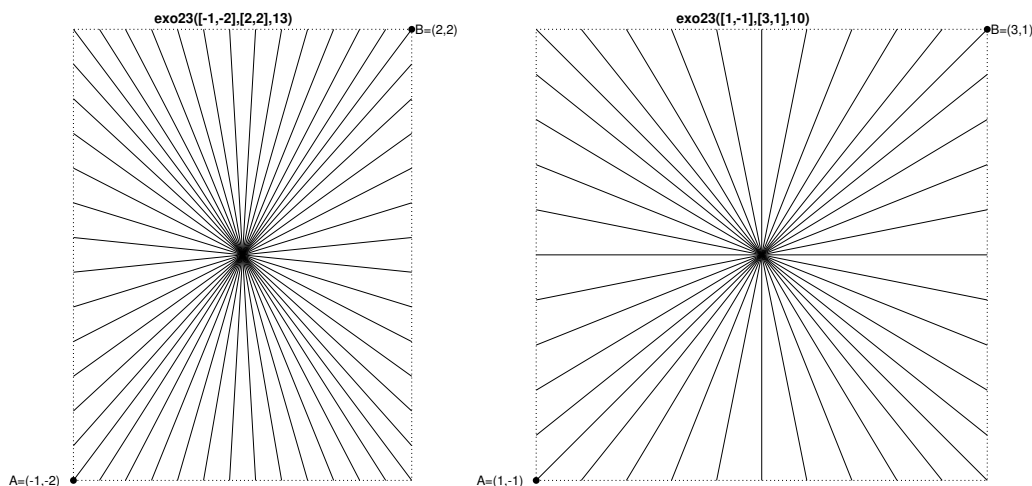
Q. 1 Ecrire une fonction `DisReg` permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points. ■

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle ayant pour sommets A , (x_B, y_A) , B et (x_A, y_B) .

Q. 2 Ecrire une fonction `exo23` de paramètres A , B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle en pointillé,
- relier les points des bords gauche et droit du rectangle, dont les ordonnées sont une discrétisation régulière en $n + 1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.
- relier les points des bords inférieur et supérieur du rectangle, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en $n + 1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



EXERCICE 3 : Dérivation (4 points)

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]\bar{x}, \bar{x} + h[$, $\exists \xi_- \in]\bar{x} - h, \bar{x}[$, tel que

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (3.1)$$

$$\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} = f'(\bar{x}) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (3.2)$$

- Ces formules sont des approximations de $f'(\bar{x})$ d'ordre 1 par rapport à h .
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{\bar{x}, \bar{x} + h\}$ et $\{\bar{x} - h, \bar{x}\}$.

Q. 1 On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3.3)$$

Ecrire une fonction `DIFF1` permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ■

Q. 2 Ecrire un programme permettant de vérifier graphiquement l'ordre des approximations utilisées dans la fonction `DIFF1`. ■