

Méthodes Numériques I

Algorithmique numérique

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

4 septembre 2017

Plan

1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

2 Dérivation numérique

3 Intégration numérique

- Méthodes simplistes
- Méthodes de Newton-Cotes
- Méthodes composites
- Autres méthodes
- Intégrales multiples

4 Résolution de systèmes linéaires

♥ Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté \mathcal{P}_n , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

avec

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Théorème



Theorem 1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, \mathcal{P}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3)$$

Exemple

A titre d'exemple, on représente, En figure 1, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à 7 points donnés.

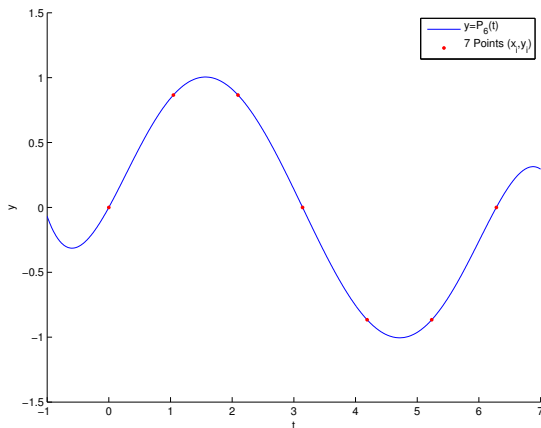


FIGURE – Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés)

Exercices



Exercise 1.1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $x \in \mathbb{R}$.



Exercise 1.2

Soit \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et \mathbf{X} un vecteur de \mathbb{R}^m .

- 1 Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

- 2 Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de n et m .



Exercise 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n + 1$ points et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i)$, $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement f et \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(X_i, Y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) sur l'intervalle $[a, b]$.

On utilisera pour cela la fonction `PLOT` dont la syntaxe est `PLOT(x, y)` où \underline{x} et \underline{y} sont des vecteurs de \mathbb{R}^k . Cette fonction relie successivement les points $(x(j), y(j))$, pour j allant de 1 à k , par des segments.

Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$.

Erreur de l'interpolation

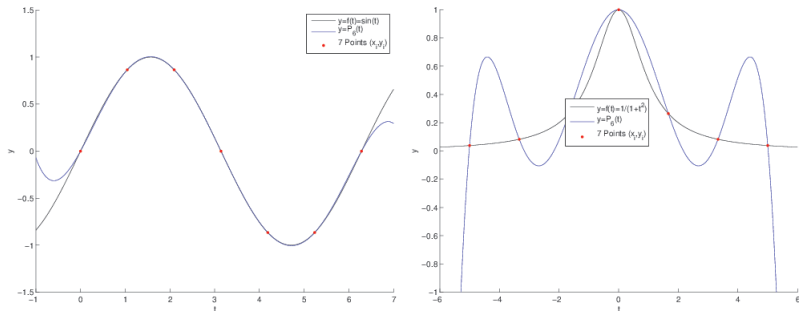


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

Erreur de l'interpolation

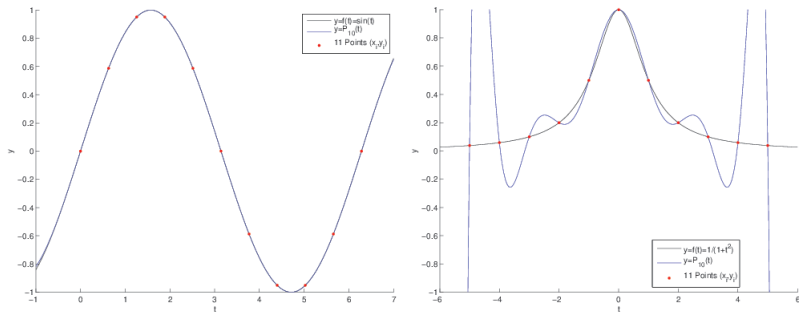


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

Erreur de l'interpolation

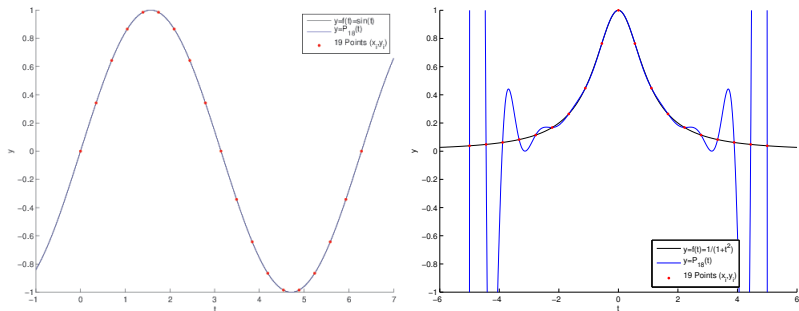


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Erreur de l'interpolation



Theorem 2: Cauchy, 1840

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction $(n + 1)$ -fois différentiable et $\mathcal{P}_n(t)$ le polynôme d'interpolation de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, $\forall t \in [a, b]$, $\exists \xi_t \in (\min_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} (x_i, t), \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} (x_i, t))$,

$$f(t) - \mathcal{P}_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - x_i) \quad (5)$$

Points de Chebyshev

Pour minimiser l'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction f par un polynôme d'interpolation de Lagrange, on peut, pour un n donné, "jouer" sur le choix des points x_i :

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad \forall (x_i)_{i=0}^n, \quad x_i \in [a, b], \text{ distincts 2 à 2} \quad (6)$$



Theorem 3

Les points réalisant (6) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (7)$$

Points de Chebyshev

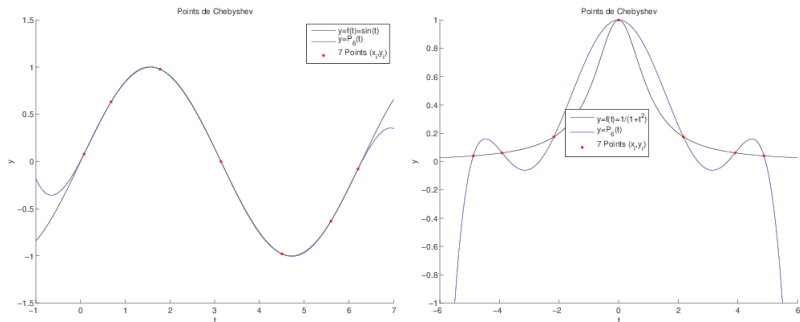


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

Points de Chebyshev

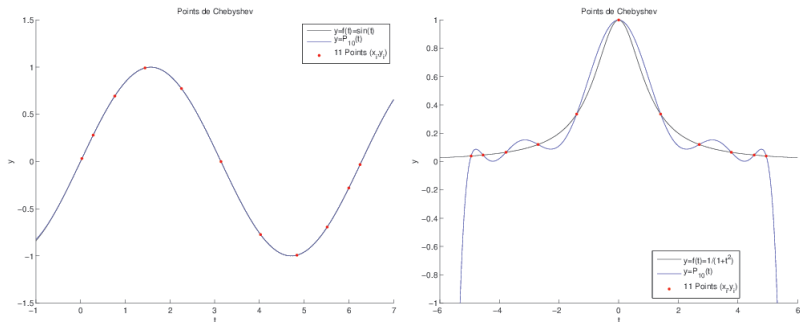


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

Points de Chebyshev

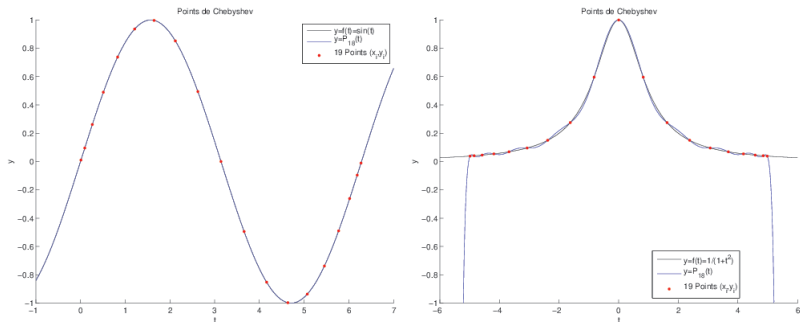


FIGURE – Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

2 **Dérivation numérique**

3 Intégration numérique

- Méthodes simplistes
- Méthodes de Newton-Cotes
- Méthodes composites
- Autres méthodes
- Intégrales multiples

4 Résolution de systèmes linéaires

Dérivée

On propose de chercher une approximation de la dérivée première de f en un point $x \in]a, b[$.

Definition 2.1

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dérivable en un point $x \in]a, b[$ si la limite suivante existe et est finie

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) \quad (8)$$

Premières approximations

différence finie progressive :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (9)$$

différence finie rétrograde :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (10)$$



Theorem 4: Taylor-Lagrange

On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h$ appartienne à I , il existe $\theta_h \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta_h h) \quad (11)$$

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x + h[$, $\exists \xi_- \in]x - h, x[$, tel que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (12)$$

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (13)$$

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x + h[$, $\exists \xi_- \in]x - h, x[$, tel que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (12)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (13)$$

- Ces formules sont des approximations d'ordre **1** de $f'(x)$ par rapport à h .

Estimation d'erreur

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]x, x + h[$, $\exists \xi_- \in]x - h, x[$, tel que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (12)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (13)$$

- Ces formules sont des approximations d'ordre **1** de $f'(x)$ par rapport à h .
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{x, x+h\}$ et $\{x-h, x\}$.

Exercice 1



Exercice 2.1

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (14)$$

Ecrire une fonction `DERIVE1` permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au troisième ordre.

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (15)$$

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (15)$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.

Ordre 2

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (15)$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre **2**.

Exercice 2



Exercice 2.2

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (16)$$

Ecrire une fonction `DERIVE2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a, b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au quatrième ordre.

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a, b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au quatrième ordre.

On obtient alors

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (17)$$

Dérivée seconde

Si $f \in \mathcal{C}^4(]a, b[)$, on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x + h)$ et $f(x - h)$ jusqu'au quatrième ordre.

On obtient alors

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (17)$$

Cette approximation est d'ordre **2**.

Exercice 3



Exercice 2.3

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (18)$$

Ecrire une fonction `DERIVESECONDE2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Plan

1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

2 Dérivation numérique

3 Intégration numérique

- Méthodes simplistes
- Méthodes de Newton-Cotes
- Méthodes composites
- Autres méthodes
- Intégrales multiples

4 Résolution de systèmes linéaires

Intégration

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ donné.
On propose de chercher une approximation de

$$I = \int_a^b f(t) dt$$

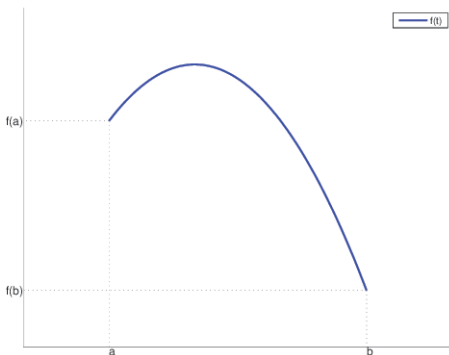


FIGURE – Représentation de la fonction f

Intégration

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ donné.
On propose de chercher une approximation de

$$I = \int_a^b f(t) dt$$

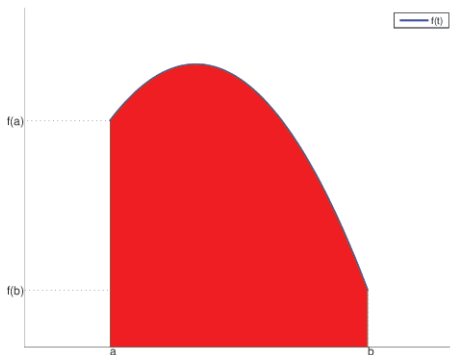


FIGURE – Représentation de $\int_a^b f(t) dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

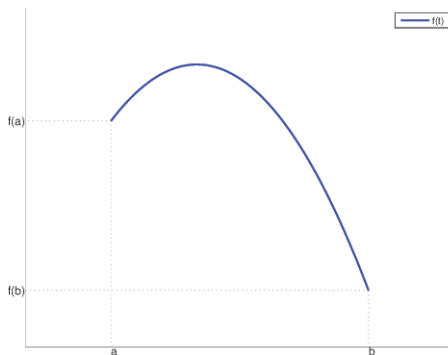


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

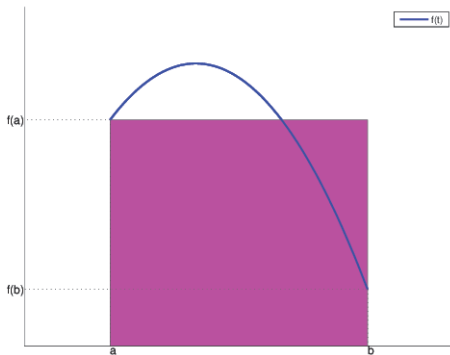


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(a)$.

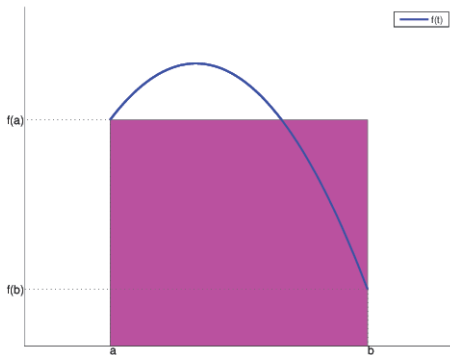


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b - a)f(a), \text{ formule du rectangle (à gauche)}$$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

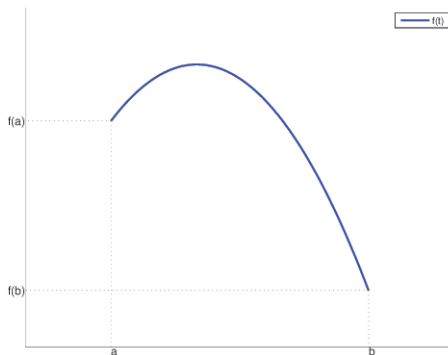


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

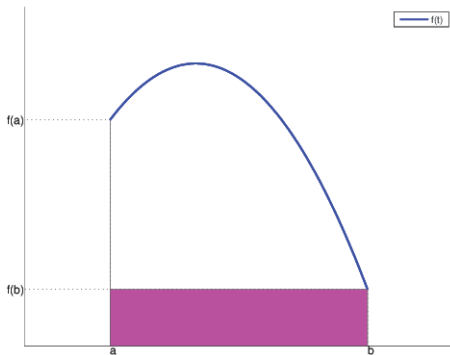


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(b)$.

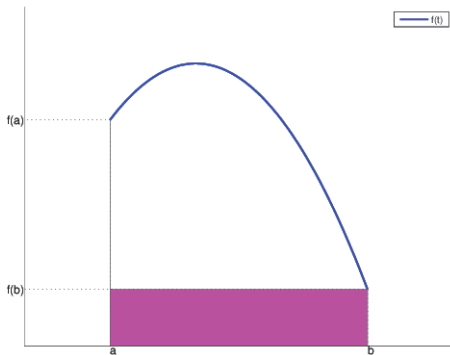


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b - a)f(b), \text{ formule du rectangle (à droite)}$$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a + b)/2$.

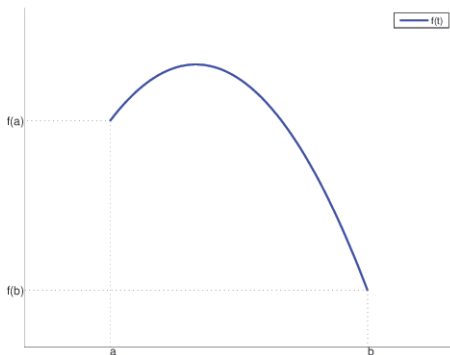


FIGURE – Représentation de la fonction f

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a + b)/2$.

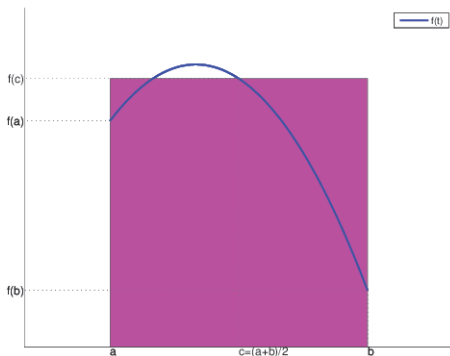


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

Méthodes simplistes

On approche f par le polynôme constant $P(t) = f(c)$, avec $c = (a + b)/2$.

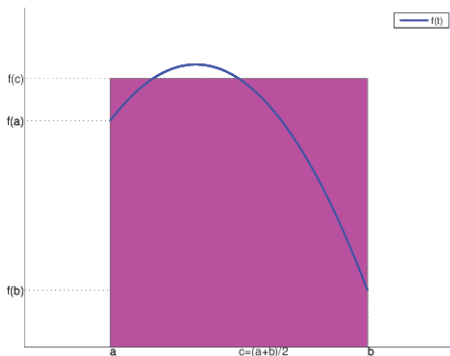


FIGURE – Représentation de $\int_a^b P(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dx \approx (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right), \text{ formule du point milieu}$$

Méthodes de Newton-Cotes

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Méthodes de Newton-Cotes

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
- 2 On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange \mathcal{P}_n de degré n tel que

$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Méthodes de Newton-Cotes

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
- 2 On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange \mathcal{P}_n de degré n tel que

$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n L_i(t) f(t_i)$$

Méthodes de Newton-Cotes

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
- 2 On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange \mathcal{P}_n de degré n tel que

$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n L_i(t) f(t_i)$$

- 3 On a alors

$$\int_a^b f(t) dt \approx \int_a^b \mathcal{P}_n(t) dt = \sum_{i=0}^n f(t_i) \int_a^b L_i(t) dt.$$

Méthodes de Newton-Cotes

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.
- 2 On approche f par le polynôme d'interpolation de Lagrange \mathcal{P}_n de degré n tel que

$$\mathcal{P}_n(t_i) = f(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n L_i(t) f(t_i)$$

- 3 On a alors

$$\int_a^b f(t) dt \approx \int_a^b \mathcal{P}_n(t) dt = \sum_{i=0}^n f(t_i) \int_a^b L_i(t) dt.$$

Les formules de Newton-Cotes génériques :

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i)$$

Méthodes de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_a^b L_i(t) dt$$

En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a

n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	ordre
1	1/2	1	1				trapèzes	1
2	1/3	1	4	1			Simpson	3
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5

Simpson : $\int_a^b f(t) dt \approx$

Méthodes de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_a^b L_i(t) dt$$

En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a

n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	ordre
1	1/2	1	1				trapèzes	1
2	1/3	1	4	1			Simpson	3
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5

$$\text{Simpson : } \int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Definition 3.1

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Theorem 5

Les formules de Newton-Cotes à $n + 1$ points sont d'ordre n si n est impair et d'ordre $n + 1$ sinon.

Definition 3.1

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Theorem 6

Les formules de Newton-Cotes à $n + 1$ points sont d'ordre n si n est impair et d'ordre $n + 1$ sinon.

Attention

Du au phénomène de Runge, ces formules ne sont pas "fiables" pour des ordres élevés.

Méthodes composites

Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles.
Soit $(x_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$:
 $x_k = a + kh$ avec $h = (b - a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx hf(m_k)$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx hf(m_k)$$



Theorem 8

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n f(m_k) + \mathcal{O}(h^2).$$

Méthodes composites des points milieux

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx hf(m_k)$$



Theorem 9

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n f(m_k) + \mathcal{O}(h^2).$$

Erreur d'ordre 2 (par rapport à h .)



Exercice 3.1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADPM permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des points milieux.

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right)$$

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right)$$



Theorem 11

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Méthodes composites des trapèzes

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right)$$



Theorem 12

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Erreur d'ordre **2** (par rapport à h .)

Méthodes composites des trapèzes : Exercice



Exercice 3.2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADTRAPEZE permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des trapèzes.

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$



Theorem 14

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Méthodes composites de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

On note $m_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$



Theorem 15

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Erreur d'ordre 4 (par rapport à h .)

Méthodes composites de Simpson : Exercice



Exercice 3.3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction `QUADSIMPSON` permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite de Simpson.

Ordres (numériques) des méthodes composites

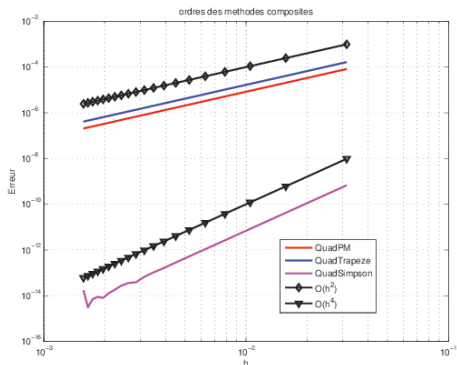


FIGURE – Ordre de l'erreur des méthodes composites



Exercise 3.4

Ecrire un programme Matlab permettant d'obtenir cette figure sachant qu'ici $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

Autres méthodes

Il existe un grand nombre de méthodes d'intégration numérique :

- Méthode de Gauss-Legendre
- Méthode de Gauss-Tchebychev
- Méthode de Gauss-Laguerre
- Méthode de Gauss-Hermitte
- Méthode de Gauss-Lobatto
- Méthode de Romberg...

Intégrales multiples

On veut approcher, en utilisant la formule de Simpson, l'intégrale

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \approx \tilde{g}(x) = \frac{d-c}{6} \left(f(x, c) + 4f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} I = \int_a^b g(x) dx &\approx \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) \\ &\approx \frac{b-a}{6} \left(\tilde{g}(a) + 4\tilde{g}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \tilde{g}(b) \right) \end{aligned}$$

Intégrales multiples : formule de Simpson 2D

On pose $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = \frac{c+d}{2}$

$$I \approx \frac{b-a}{6} \frac{d-c}{6} \begin{pmatrix} f(a, c) + 4f(a, \beta) + f(a, d) \\ +4(f(\alpha, c) + 4f(\alpha, \beta) + f(\alpha, d)) \\ +f(b, c) + 4f(b, \beta) + f(b, d) \end{pmatrix}$$

Intégrales multiples : méthodes composites

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
- 2 Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $y_l = c + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.

Intégrales multiples : méthodes composites

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
- 2 Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $y_l = c + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.
- 3 Relation de Chasles :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x, y) dy dx.$$

Intégrales multiples : méthodes composites

- 1 Discrétisation régulière de $[a, b]$: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.
- 2 Discrétisation régulière de $[c, d]$: $\forall l \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $y_l = c + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.
- 3 Relation de Chasles :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x, y) dy dx.$$

- 4 Formule de Simpson 2D :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ &= \\ & \frac{h_x h_y}{36} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left(\begin{array}{l} f(x_{k-1}, y_{l-1}) + 4f(x_{k-1}, \beta_l) + f(x_{k-1}, y_l) \\ + 4(f(\alpha_k, y_{l-1}) + 4f(\alpha_k, \beta_l) + f(\alpha_k, y_l)) \\ + f(x_k, y_{l-1}) + 4f(x_k, \beta_l) + f(x_k, y_l) \end{array} \right) \end{aligned}$$

avec $\alpha_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ et $\beta_l = \frac{y_{l-1} + y_l}{2}$.

Plan

1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

2 Dérivation numérique

3 Intégration numérique

- Méthodes simplistes
- Méthodes de Newton-Cotes
- Méthodes composites
- Autres méthodes
- Intégrales multiples

4 Résolution de systèmes linéaires