TRAVAUX DIRIGÉS - 3

1 Intégration numérique[1]

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADPM permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des points milieux.

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADTRAPEZE permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des trapèzes.

EXERCICE 3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADSIMPSON permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite de Simpson.

EXERCICE 4

En utilisant les 3 fonctions précédentes, écrire un programme Matlab permettant d'obtenir la figure 1 sachant qu'ici $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

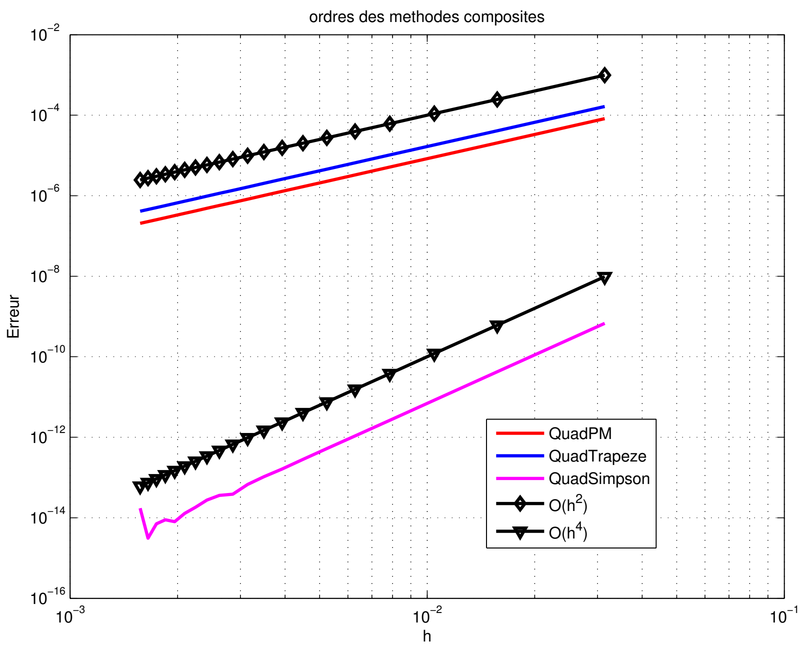

Figure 1: Ordre des méthodes composites

[1]Exercices associés à la présentation sur les méthodes d'intégration numérique

2 Algèbre linéaire[2]

Exercice 5

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction VecAXPY permettant de calculer $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Exercice 6

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Ecrire la fonction VecDot permettant de calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.
2. Ecrire la fonction VecNorm1 permettant de calculer

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

3. Ecrire la fonction VecNorm2 permettant de calculer

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 7

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ Ecrire la fonction MatAXPY permettant de retourner $\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Exercice 8

Ecrire la fonction MatTranspose permettant de retourner la transposé d'une matrice.

Exercice 9

Ecrire la fonction MatMult permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur.

Exercice 10

Ecrire la fonction MatMatMult permettant de retourner le produit de deux matrices.

Exercice 11

Ecrire la fonction MatNorm1 permettant de retourner la norme d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|\right).$$

Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (matrice réelle m lignes, n colonnes) et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$. Le vecteur produit $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$ a pour composantes

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j.$$

[2] Exercices associés à la présentation sur la résolution de systèmes linéaires

Q. 1 (mathématiques) *1. Quelle est la condition sur l' indice p pour que le vecteur produit* $\boldsymbol{v}$ *soit bien défini?*

2. Quelle est la dimension du vecteur produit $\boldsymbol{v}$*?* ▪

Q. 2 (algorithmique) *Ecrire la fonction* MatMult *permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre* $m = p = n$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$*)* ▪

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La matrice produit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ a pour composantes

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Q. 3 (mathématiques) *1. Quelle est la condition sur les dimensions des matrices* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *pour que la matrice produit* $\mathbb{C}$ *soit bien définie?*

2. Quelles sont les dimensions de la matrice produit $\mathbb{C}$*?* ▪

Q. 4 (algorithmique) *Ecrire la fonction* MatMatMult *permettant de retourner le produit de deux matrices. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre* $m = p = q = n$*. Dans ce cas les trois matrices sont de dimension* $n \times n$*)* ▪

Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ($D_{i,j} = 0$ si $j \neq i$) et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Q. 5 *1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système admet-il une unique solution?*

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaire.

3. Ecrire la fonction RSLdiag *(algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire* $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*.* ▪

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure ($L_{i,j} = 0$ si $j > i$) et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, c'est à dire trouver le vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

Q. 6 *1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système (12.1) admet-il une unique solution?*

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaire.

3. Ecrire la fonction RSLinf *(algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire* $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*.* ▪