Méthodes Numériques I[a]

Travaux Pratiques N^o 4

•••••••

Intégration Numérique

[a]Version du September 27, 2017

1 Méthodes composites pour le calcul de $\int_A^B f(x)dx$

Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles.

Soit $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[A,B]$: $x_k = A + kh$ avec $h = (B-A)/n$. On a alors

$$\int_A^B f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{0.1}$$

1.1 Description de différentes méthodes

1.1.1 Méthodes composites des points milieux

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ et on approche chacune des intégrales par la formule du point milieux :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx hf(m_k).$$

Théorème 1 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[A,B]$. On a alors*

$$\int_A^B f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(m_k) + \mathcal{O}(h^2).$$

*Cette formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Son **degré d'exactitude** est donc 1.*
L'erreur commise est en $\mathcal{O}(h^2)$: elle est donc d'ordre 2. ▪

Q. 1 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A,B]$. Ecrire la fonction* QuadPM *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A,B]$ par la méthode composite des points milieux.* ▪

1.1.2 Méthodes composites des trapèzes

On approche chacune des intégrales de (0.1) par la formule des trapèzes

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx h\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

Théorème 2 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a, b]$. On a alors*

$$\int_A^B f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} + \mathcal{O}(h^2).$$

*Cette formule de quadrature a pour **degré d'exactitude** 1: elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.*
L'erreur commise est en $\mathcal{O}(h^2)$: elle est donc d'ordre 2. ∎

Q. 2 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadTrapeze *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode composite des trapèzes. On minimisera le nombre d'appels à la fonction f.* ∎

1.1.3 Méthodes composites de Simpson

On approche chacune des intégrales de (0.1) par la formule de Simpson

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)).$$

Théorème 3 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a, b]$. On a alors*

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4).$$

*Cette formule de quadrature a pour **degré d'exactitude** 3 : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.*
L'erreur commise est en $\mathcal{O}(h^4)$: elle est donc d'ordre 4. ∎

Q. 3 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadSimpson *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode composite de Simpson. On minimisera le nombre d'appels à la fonction f.* ∎

1.1.4 Méthode composite de Villarceau

On rappelle que les formules de Newton-Cotes génériques sont données par

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f(x_i).$$

Avec $x_i = a + ih$, $\forall i \in [\![0, m]\!]$ et $h = (b - a)/m$. En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a

m	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	degré exactitude	ordre de l'erreur
1	1/2	1	1				trapèzes	1	2
2	1/3	1	4	1			Simpson	3	4
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3	4
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5	6

On va donc approcher chacune des intégrales de (0.1) par la formule de Villarceau.

Théorème 4 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[A, B]$. La méthode **composite** de Villarceau a pour **degré d'exactitude** 5 : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 5. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(h^6)$: elle est donc d'ordre 6.* ∎

Q. 4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadVillarceau *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode **composite** de Villarceau. On minimisera le nombre d'appels à la fonction f.* ∎

1.2 Validation par l'ordre des formules de quadrature

On va vérifier les résultats d'exactitude des formules des différents théorèmes cités. Pour celà, on peut s'aider du tableau 1. Le fichier TestPoly.m contenant les exemples du tableau est fourni : il génére un tableau de structure, chaque élément du tableau étant un des exemples.

A	B	$P(x)$	$\int_A^B P(x)dx$	degré
-1	1	$2x+3$	6	1
0	2	$3x^2-2x+3$	10	2
-2	2	$2x^3-4x^2-2x+3$	$-28/3$	3
0	2	$x^4+2x^3-4x^2-2x+3$	$86/15$	4
-2	2	$-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$-716/15$	5
0	1	$x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$-131/210$	6
-1	1	$3x^7+4x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$344/105$	7
-2	1	$x^8-3x^7+4x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$65811/280$	8

Table 1: Quelques intégrales exactes

Q. 5 *Ecrire un programme, nommé* VALIDPOLY.M, *permettant de vérifier, pour chacune des* 4 *méthodes composites précédentes et pour chacun des exemples fournis, leurs degrés d'exactitude.* ▪

1.3 Validation par l'ordre de l'erreur

On va vérifier l'ordre des erreurs pour chacune des formules de quadrature programmées. On pourra utiliser comme exemple la fonction $f(x) = \sin(x)$ sachant que $\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$.

Q. 6 *Ecrire un programme, nommé* ERREUR.M, *permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des* 4 *méthodes composites précédentes, l'ordre des erreurs. voir figure 1.* ▪

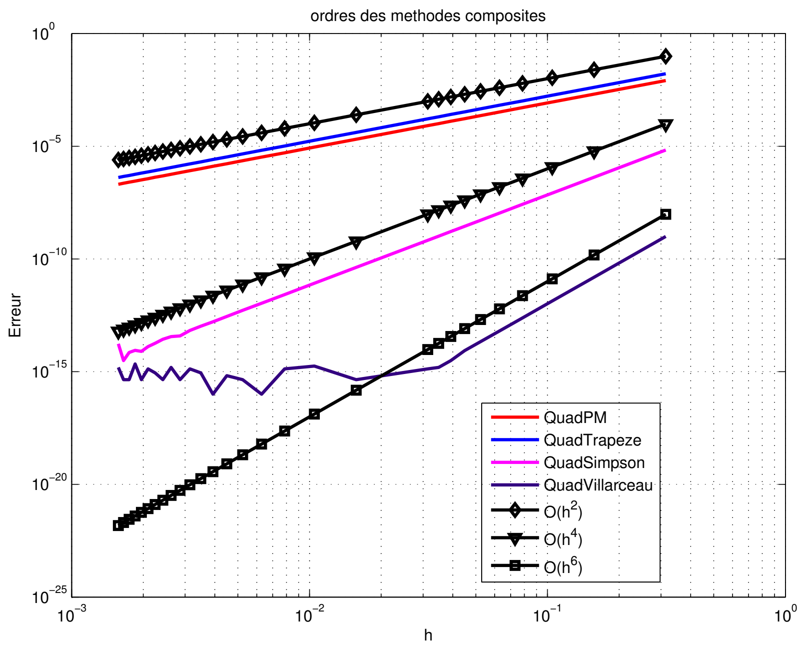

Figure 1: Ordre de l'erreur des méthodes composites

1.4 Programmation générique des méthodes composites

On va voir, dans cette partie, qu'il est possible de programmer de manière générique les méthodes composites de Newton-Cotes. Voici les sources des fonctions QUADCOMPOSITE (fichier QuadComposite.m) et TRAPEZE (fichier Trapeze.m)

Listing 1: QuadComposite.m

```
function I=QuadComposite(f,A,B,n,method)
h=(B-A)/n;
x=A:h:B;
I=0;
for k=1:n
  I=I+method(f,x(k),x(k+1));
end
```

Listing 2: Trapeze.m

```
function I=Trapeze(f,a,b)
  I=((b-a)/2)*(f(a)+f(b));
```

Pour utiliser la méthode composite des trapèzes, on appelle alors la fonction QuadComposite avec la `method` définie par la fonction Trapeze :

Listing 3: script

```
clear all
close all
g=@(x) sin(x);

I=QuadComposite(g,0,pi,100,@Trapeze);
```

Q. 7 1. *Sur le même principe, écrire les fonctions* Simpson *et* Villarceau *de telle sorte qu'elles puissent être utilisées avec la fonction* QuadComposite*.*

2. *Ecrire des programmes de validations de ces fonctions.* ■

2 Méthodes composites pour le calcul de $\int_C^D \int_A^B f(x,y)dxdy$ (facultatif)

Soit n et m deux entiers strictement positifs. On note $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_l)_{l\in[\![0,m]\!]}$ les discrétisations régulières des intervalles $[A,B]$ et $[C,D]$:

- $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = A + kh_x$ avec $h_x = \frac{B-A}{n}$.
- $\forall l \in [\![0,m]\!]$, $y_l = C + lh_y$ avec $h_y = \frac{D-C}{m}$.

On utilise la relation de Chasles sur le pavé $[A,B]\times[C,D]$ pour obtenir

$$\int_C^D \int_A^B f(x,y)dxdy = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{l-1}}^{y_l}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x,y)dxdy \tag{0.2}$$

2.1 Description de différentes méthodes

2.1.1 Méthodes composites des points milieux (2D)

Pour obtenir la formule du point milieu (2D) pour le calcul de $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$, on utilise, tout d'abord, la formule 1D sur l'intervalle $[c,d]$:

$$\int_c^d f(x,y)dy \approx h_y f\left(x, \frac{c+d}{2}\right).$$

Ce qui donne

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx h_y \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)dx.$$

Ensuite, on utilise la formule 1D sur l'intervalle $[a,b]$, pour obtenir formule du point milieu (2D)

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx h_y h_x f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right). \tag{0.3}$$

Q. 8 *Soit f une fonction définie sur $[A, B] \times [C, D]$. Ecrire la fonction* QuadPM2D *permettant de calculer une approximation de $\int_C^D \int_A^B f(x, y)dxdy$ par la méthode* ***composite*** *des points milieux.* ■

Q. 9 *Sur le même principe écrire les fonctions* QuadTrapeze2D *et* QuadSimpson2D *permettant de calculer une approximation de $\int_C^D \int_A^B f(x, y)dxdy$ respectivement par la méthode* ***composite*** *des trapèzes et de Simpson.* ■

Remarque 5

1. *L'ordre des formules de quadrature 2D est identique à leur analogue en 1D.*
2. *En posant $h = \max(h_x, h_y)$, l'ordre de l'erreur des formules de quadrature 2D est identique à leur analogue en 1D.* ■

On va vérifier les résultats d'exactitude des formules des différents théorèmes cités. Pour celà, on peut s'aider du tableau 2. Le fichier TestPoly2D.m contenant les exemples du tableau est fourni : il génére un tableau de structure, chaque élément du tableau étant un des exemples.

$[a, b] \times [c, d]$	$P(x, y)$	$\int_a^b \int_c^d P(x, y)dydx$	degré
$[-1, 1] \times [-1, 1]$	$2x - y + 3$	12	1
$[-1, 2] \times [-2, 1]$	$2x^2 + 4xy - 3y^2 + x - y + 3$	18	2
$[-2, 2] \times [-2, 4]$	$x^3 - 2x^2y - 2y^3 + x^2 + 4xy - 3y^2 + x - y + 3$	-752	3
$[-2, 1] \times [-3, 3]$	$-2x^4 - x^2y^2 + y^4 - x^3 - 2x^2y - 2y^3 + x^2 + 4xy - 3y^2 + x - y + 3$	819/10	4
$[-3, 3] \times [-3, 3]$	$x^5 - 2x^4y - x^2y^2 + y^4 - x^3 - 2x^2y - 2y^3 - 3y^2 + x - 3$	$-864/5$	5

Table 2: Quelques intégrales 2D exactes

Q. 10 *Ecrire un programme, nommé* validPoly2D.m*, permettant de vérifier, pour chacune des 3 formules de quadrature précédentes et pour chacun des exemples fournis, l'ordre des formules de quadrature.* ■

On va vérifier l'ordre des erreurs pour chacune des formules de quadratures programmées. On pourra utiliser comme exemple la fonction $f(x, y) = \cos(x + y)$ sachant que $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y)dxdy = -4$.

Q. 11 *Ecrire un programme, nommé* erreur2D.m*, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 3 formules de quadrature précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 2.* ■

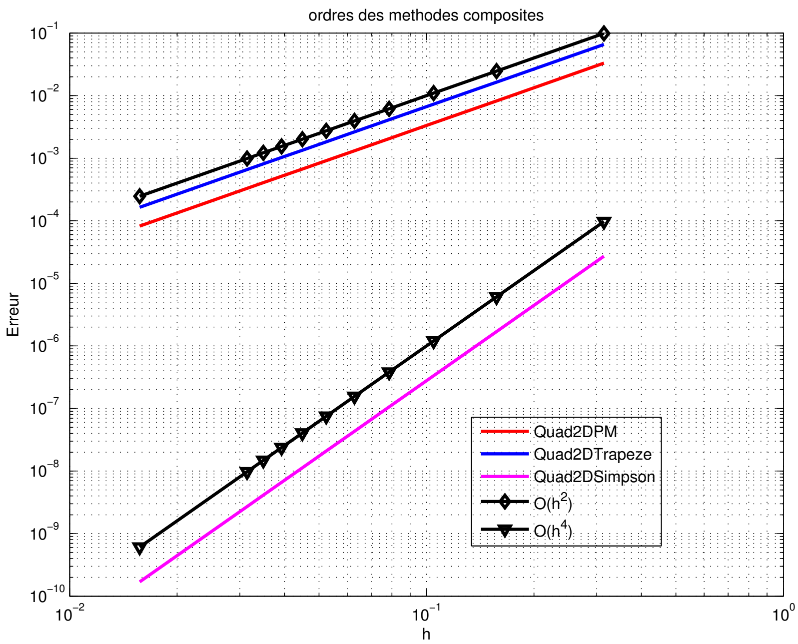

Figure 2: Ordre de l'erreur des méthodes composites 2D