Méthodes Numériques I[a]

Travaux Pratiques N^o 5

• • • • • • •

Algèbre linéaire [b]

[a]Version du September 21, 2017
[b]version en cours de rédaction

Un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ est un *objet* mathématique contenant n nombres réels et l'on note

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i est un réel et on dit que u_i est la **i-ème composante du vecteur $\boldsymbol{u}$**.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un *objet* mathématique contenant $m \times n$ nombres réels *rangés* en m lignes et n colonnes et l'on note

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,j}$ est un réel et on dit que $A_{i,j}$ est la **composante** (i, j) **de la matrice** $\mathbb{A}$ et elle est située en ligne i et colonne j.

1 Opérations élémentaires

1.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{u}$ par le vecteur $\boldsymbol{v}$ est un nombre réel noté $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ et défini par

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{3}$$

Exercice 1

1. *Ecrire la fonction* PS *permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.*
2. *Ecrire un programme permettant de valider cette fonction. On pourra pour cela utiliser la fonction* DOT *de Matlab.*

1.2 Normes d'un vecteur

Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La norme usuelle du vecteur $\boldsymbol{u}$ (correspondant à la mesure d'une *distance*) est le nombre réel positif $\|\boldsymbol{u}\|_2$ défini par

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2}. \tag{4}$$

On peut aussi noter que $\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$.

De manière plus générale, la norme p du vecteur $\boldsymbol{u}$, $p \geqslant 1$, est le nombre réel positif noté $\|\boldsymbol{u}\|_p$ défini par

$$\|\boldsymbol{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Enfin la norme dites *infini* du vecteur $\boldsymbol{u}$ est le nombre réel positif noté $\|\boldsymbol{u}\|_\infty$ et défini par

$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |u_i|. \tag{6}$$

Exercice 2 *1. Ecrire les fonctions* Norme *et* NormeInf *permettant de calculer respectivement la norme p et la norme infini d'un vecteur.*

2. Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions. On pourra pour cela utiliser la fonction norm *de Matlab.*

1.3 Produit matrice-vecteur

Soient $\mathbb{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$ n'est défini que si le nombre de colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de ligne de $\boldsymbol{u}$ i.e.

$$n = p$$

Dans ce cas le produit de $\mathbb{A}$ par $\boldsymbol{u}$, noté $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$, est un vecteur de $\mathbb{R}^m$, m étant le nombre de ligne de $\mathbb{A}$. Le vecteur résultat $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^m$ est alors donné par

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j. \tag{7}$$

En définissant $\boldsymbol{A}_{i,:}$ comme étant le i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$, on a la relation utilisant le produit scalaire de la i-ème ligne de $\mathbb{A}$ avec le vecteur $\boldsymbol{u}$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j = \langle \boldsymbol{A}_{i,:}, \boldsymbol{u} \rangle.$$

Exercice 3 *1. Ecrire la fonction* ProdMatVec *permettant de calculer le produit d'une matrice par un vecteur*

2. Ecrire un programme permettant de valider cette fonction.

1.4 Produit matrice-matrice

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$, noté $\mathbb{A}\mathbb{B}$, n'est défini que si le nombre de colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de ligne de $\mathbb{B}$ i.e.

$$n = p$$

Dans ce cas le produit de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$, m étant le nombre de ligne de $\mathbb{A}$ et q le nombre de colonne $\mathbb{B}$. La matrice résultat $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ est alors donné par

$$\forall i \in [\![1,m]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!] \quad C_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}. \tag{8}$$

Attention le produit de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ est différent du produit de $\mathbb{B}$ par $\mathbb{A}$ dans le cas général!

- En notant par $\boldsymbol{A}_{i,:}$ le i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et en notant par $\boldsymbol{B}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{B}$, on a alors la relation
$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}Bk,j = \langle \boldsymbol{A}_{i,:}, \boldsymbol{B}_{:,j} \rangle .$$
- On peut aussi noter que j-ème vecteur colonne de $\mathbb{C}$ est le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{B}$:
$$\boldsymbol{C}_{:,j} = \mathbb{A}\boldsymbol{B}_{:,j}.$$

Exercice 4 1. *Ecrire la fonction* ProdMatMat *permettant de calculer le produit de deux matrices*

2. *Ecrire un programme permettant de valider cette fonction.*

2 Résolution de systèmes linéaires particuliers

2.1 Matrice diagonale

2.2 Matrice triangulaire inférieure

2.3 Matrice triangulaire supérieure

3 Méthode de Gauss