AIR1 **Méthodes Numériques I**
Sup'Galilée **Année 2015-2016**

Travaux pratiques - Contrôle du 4 janvier 2016

Durée : 1h30

Remarques importantes

- Les trois parties sont indépendantes.
- Tous les codes demandés seront écrits dans le langage Matlab.
- Aucun document autorisé.
- Aucun échange de documents.
- Aucune communication entre étudiants.

Exercice 1 : Integration (10 points)

Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a, b]$. Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles. On note $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_k = a + kH$ avec $H = (b - a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{1.1}$$

Les formules de Newton-Cotes génériques sont données par

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{m} \mu_i f(t_i).$$

Avec $t_i = \alpha + ih$, $\forall i \in [\![0, m]\!]$ et $h = (\beta - \alpha)/m$. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a

m	C	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	degré exactitude	ordre de l'erreur
1	1/2	1	1				trapèzes	1	2
2	1/3	1	4	1			Simpson	3	4
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3	4
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5	6

La **méthode composite de Simpson** consiste à approcher chacune des intégrales sommées dans (1.1) par la formule de Simpson (Newton-Cotes avec $m = 2$).

Théorème 1 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode* ***composite*** *de Simpson a pour* ***degré d'exactitude*** *3 : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(H^4)$: elle est donc d'ordre 4.* ∎

Q. 1
1. *Ecrire la formule de Simpson pour le calcul d'une approximation de $\int_\alpha^\beta f(t)dt$.*
2. *Ecrire la formule* ***composite*** *de Simpson pour le calcul d'une approximation de $\int_a^b f(x)dx$.* ∎

La méthode composite des Trapèzes est, quant à elle, donnée par la formule

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) + f(x_k)) + \mathcal{O}(H^2). \tag{1.2}$$

Le degré d'exactitude de cette formule est 1.

Q. 2 *Ecrire la* ***fonction*** `QuadTrapeze` *permettant de retourner l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode* ***composite*** *(1.2) en minimisant le nombre d'appels à la fonction f.* ∎

On va vérifier le degré d'exactitude de la formule composite des trapèzes. On rappelle par exemple que $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

Q. 3 *Ecrire un* ***programme*** *permettant de vérifier le degré d'exactitude de la formule composite des trapèzes.* ∎

On va maintenant vérifier l'ordre de la méthode. On rappelle par exemple que $\int_a^b \sin(x)dx = \cos(a) - \cos(b)$.

Q. 4 *Ecrire un* ***programme*** *permettant de vérifier graphiquement l'ordre des deux méthodes composites précédentes.* ■

Exercice 2 : Dérivation (4 points)

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$, alors $\exists \xi_- \in]\bar{x}-h, \bar{x}[$, $\exists \xi_+ \in]\bar{x}, \bar{x}+h[$, tel que

$$\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} = f'(\bar{x}) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \tag{2.1}$$

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \tag{2.2}$$

(2.3)

- Ces formules sont des approximations de $f'(\bar{x})$ d'ordre 1 par rapport à h.
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h\}$ et $\{\bar{x}-h, \bar{x}\}$.

Q. 1 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

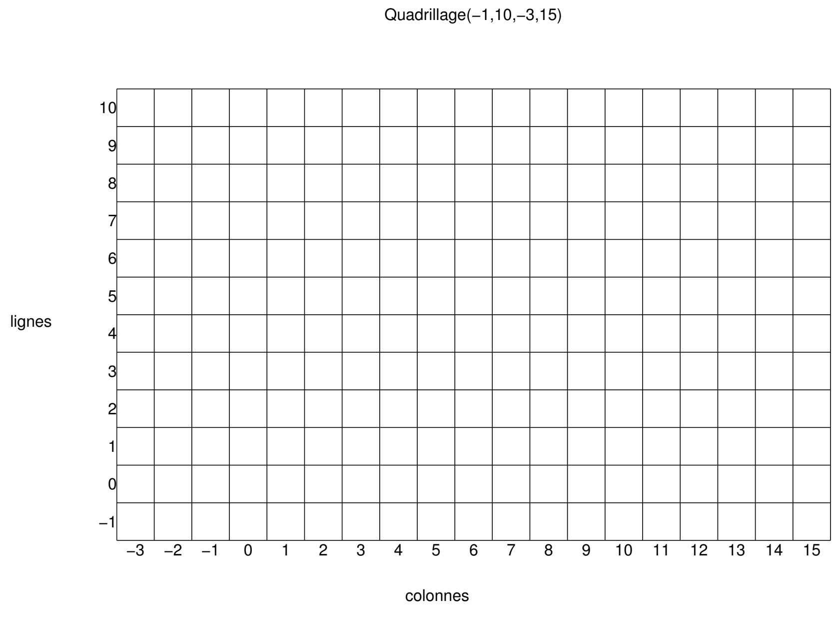
$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.4}$$

Ecrire une fonction Der1 *permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de vérifier graphiquement l'ordre des approximations utilisées dans la fonction* Der1. ■

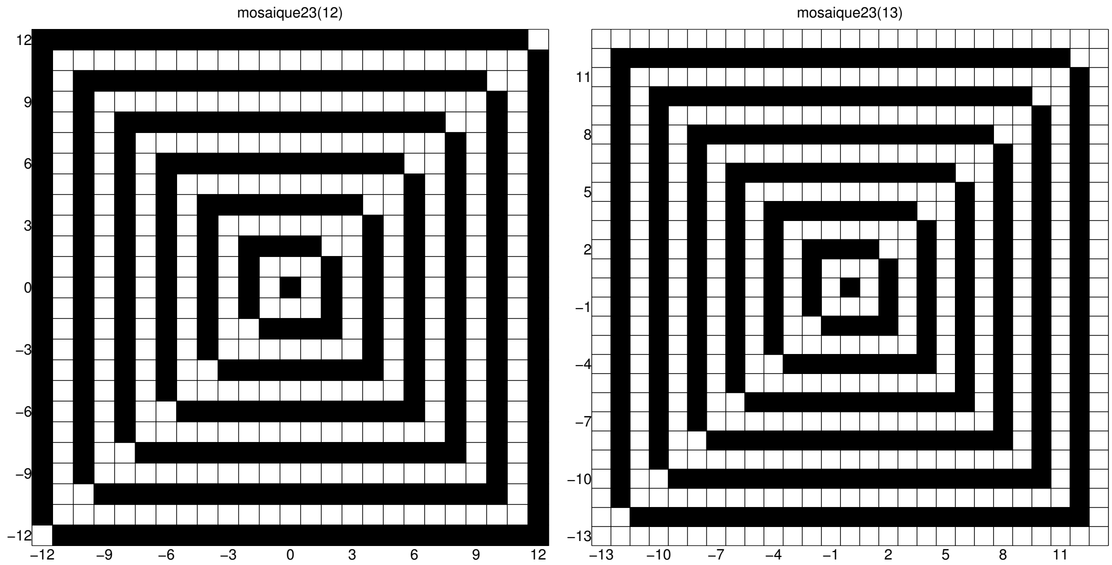
Exercice 3 : Mosaique (6 points)

On dispose d'un quadrillage **quelconque** généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Q. 1 *Ecrire une fonction* `Mosaique23` *de paramètre n, permettant de créer des figures sur le quadrillage de lignes $-n$ à n et de colonnes $-n$ à n. Voici deux exemples, avec $n = 12$ et $n = 13$, des figures que l'on souhaite représenter :*



N.B. La numérotation des lignes et des colonnes sur les figures précédentes n'est pas à *programmer.*