III/ Méthodes des différences finies (2D en espace)

ⓐ Pb modèle stationnaire

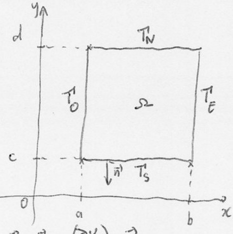
$$(1)\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ u_{|\Gamma_O}(x) = g_O(x) \quad \forall x \in \Gamma_O \\ u_{|\Gamma_E}(x) = g_E(x) \quad \forall x \in \Gamma_E \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = g_N(x) \quad \forall x \in \Gamma_N \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)(x) = g_S(x) \quad \forall x \in \Gamma_S \end{cases}$$

C.L. de type Dirichlet (sur Γ_O, Γ_E)

C.L. de type Neumann (sur Γ_N)

C.L. de type Robin ou Fourier (sur Γ_S)

$\Omega =]a,b[\times]c,d[$



<u>Rappel</u> $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

n est la normale exterieure à Ω et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \vec{n}$

sur Γ_N, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Γ_S, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Γ_O, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Γ_E, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

<u>Données</u> du problème (1) sont

a, b, c, d 4 réels $a < b$ et $c < d$

$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$g_O : \Gamma_O \to \mathbb{R}$

$g_E : \Gamma_E \to \mathbb{R}$

$g_N : \Gamma_N \to \mathbb{R}$

$g_S : \Gamma_S \to \mathbb{R}$

$\alpha : \Gamma_S \to \mathbb{R}$

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$

On discrétise les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$

$x_i = a + i h_x$ avec $h_x = \dfrac{b-a}{N_x}$ $\quad \forall i \in [\![0, N_x]\!]$

$y_j = c + j h_y$ avec $h_y = \dfrac{d-c}{N_y}$ $\quad \forall j \in [\![0, N_y]\!]$

$$(1) \Rightarrow (2)\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)\right) = f(x_i, y_j) \quad \forall i \in [\![1, N_x-1]\!], \forall j \in [\![1, N_y-1]\!] & (2)(a) \\ u(x_0, y_j) = g_O(x_0, y_j) \quad \forall j \in [\![0, N_y]\!] & (2)(b) \\ u(x_{N_x}, y_j) = g_E(x_{N_x}, y_j) \quad \text{''} & (2)(c) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_{N_y}) = g_N(x_i, y_{N_y}) \quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![\quad \text{car } (\vec{n} \text{ n'est pas défini aux "coin"}) & (2)(d) \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_0) + \alpha(x_i, y_0)\, u(x_i, y_0) = g_S(x_i, y_0) \quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![& (2)(e) \end{cases}$$

On a vu que

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + O(h^2) \qquad (3)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} + O(h^2) \qquad (4)$$

On a vu aussi que

$$v'(x) = \frac{v(x-2h) - 4v(x-h) + 3v(x)}{2h} + O(h^2)$$

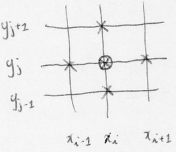
Donc

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x,y-2h) - 4u(x,y-h) + 3u(x,y)}{2h} + O(h^2) \qquad (5)$$

$$(2)-(a) \underset{(3)-(4)}{\Leftrightarrow} -\left(\frac{u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j)}{h_x^2} + \frac{u(x_i,y_{j+1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j-1})}{h_y^2} \right).$$

$$= f(x_i,y_j) + O(h_x^2) + O(h_y^2) \qquad \forall i \in [\![1, N_x-1]\!] \quad \forall j \in [\![1, N_y-1]\!]$$

Pour calculer une approximation du Laplacien de u, on utilise une formule à 5 points : ~~on~~ Laplacien en (x_i, y_j)



× pts utilisés dans la formule

o pt de calcul

$$(2)\text{-}(d) \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{u(x_i, y_{N_y-2}) - 4u(x_i, y_{N_y-1}) + 3u(x_i, y_{N_y})}{2h_y} = g_N(x_i, y_{N_y}) + O(h_y^2) \quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![} \quad (5)$$

Pour (2)-(e) il faut trouver une formule similaire à (5) aux point y, $y+h$ et $y+2h$

On a, $h>0$

(6) $\quad v(x+h) = v(x) + h v'(x) + \frac{h^2}{2!} v^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!} v^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} v^{(4)}(\xi_+^1) \quad \xi_+^1 \in]x, x+h[$

(7) $\quad v(x+2h) = v(x) + 2h v'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} v^{(2)}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} v^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} \cdots \quad \xi_+^2 \in]x, x+2h[$

On veut, à partir d'une combinaison linéaire entre (6) et (7), obtenir une approximation à l'ordre 2 de $v'(x)$:

$\alpha(6) + \beta(7)$:

$$\alpha v(x+h) + \beta v(x+2h) = (\alpha+\beta) v(x) + h(\alpha + 2\beta) v'(x) + \frac{h^2}{2!}\underline{(\alpha + 4\beta)} v^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}(\alpha + 8\beta) v^{(3)}(x) + O(h^4)$$

On choisi $\alpha + 4\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\beta = 1$, $\alpha = -4$ par exemple

Ce qui donne

$$-4v(x+h) + v(x+2h) = -3v(x) - 2h v'(x) + 4\frac{h^3}{3!} v^{(3)}(x) + O(h^4)$$

D'où

$$v'(x) = \frac{-3v(x) + 4v(x+h) - v(x+2h)}{2h} + O(h^2) \qquad (8)$$

On a alors

$$(2)\text{-}(e) \Leftrightarrow \quad \boxed{-\frac{-3u(x_i, y_0) + 4u(x_i, y_0 + h_y) - u(x_i, y_2)}{2h_y} + \alpha(x_i, y_0) u(x_i, y_0) = g_S(x_i, y_0) \quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![}$$

On construit alors le schéma à partir de (2)

$$(9) \begin{cases} (a) & -\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}\right) = f_{i,j} & \forall i \in [\![1, N_x-1]\!] \ \forall j \in [\![1, N_y-1]\!] \\ (b) & u_{0,j} = g_0(x_0, y_j) & \forall j \in [\![0, N_y]\!] \\ (c) & u_{N_x,j} = g_E(x_{N_x}, y_j) & \forall j \in [\![0, N_y]\!] \\ (d) & \frac{u_{i,N_y-2} - 4u_{i,N_y-1} + 3u_{i,N_y}}{2h_y} = g_N(x_i, y_{N_y}) & \forall i \in]\!]0, N_x[\![\\ (e) & -\frac{-3u_{i,0} + 4u_{i,1} - u_{i,2}}{2h_y} + \alpha_{i,0} u_{i,0} = g_S(x_i, y_0) & \forall i \in]\!]0, N_x[\![\end{cases}$$

Il y a $(N_x+1)(N_y+1)$ inconnues $U_{i,j} \sim U(x_i, y_j)$ $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$
$\forall j \in [\![0, N_y]\!]$

$= N_x N_y + N_x + N_y + 1$

Il y a

$$(N_x-1)\times(N_y-1) + (N_y+1) + (N_y+1) + (N_x-1) + (N_x-1) \text{ equations}$$

$$= N_x N_y - \cancel{N_x} - \cancel{N_y} + 1 + N_y + \cancel{N_y} + \cancel{2} + \cancel{N_x} + N_x - \cancel{2}$$

$$= N_x N_y + N_x + N_y + 1 \text{ equations}$$

Ces equations sont linéaire en les inconnues $(U_{i,j})$

Ecriture sous forme matricielle de (9)

Les inconnus sont les $u_{i,j}$ $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$, $\forall j \in [\![0, N_y]\!]$: il y en a $(N_x+1)\times(N_y+1) = d$

Le vecteur inconnu $\mathcal{U}$ est donc de dimension $(N_x+1)\times(N_y+1)$

On pose

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \hline \mathcal{U}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathcal{U}_{N_y} \end{pmatrix}$$

où chaque vecteur $\mathcal{U}_j$ est de dimension N_x+1, $\forall j \in [\![0, N_y]\!]$

et $$\mathcal{U}_j = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ \vdots \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix}$$

Montrons que (9) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbb{A}\,\mathcal{U} = b$$

avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$ $\quad d = (N_x+1)\times(N_y+1)$

On écrit la matrice sous forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{0,0} & \cdots & & \mathbb{A}_{0,N_y} \\ \hline & & & \\ \hline \mathbb{A}_{N_y,0} & & & \mathbb{A}_{N_y,N_y} \end{array}\right)$$

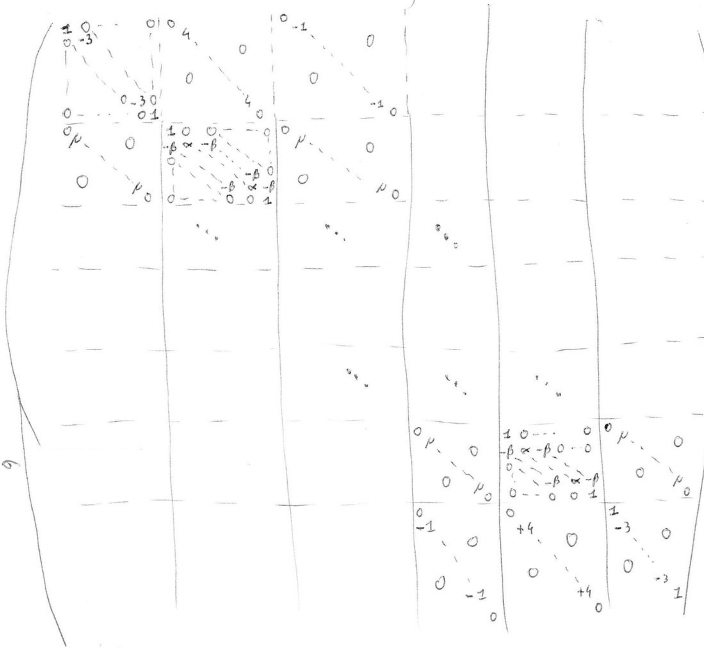
où $\mathbb{A}_{j,l} \in \mathcal{M}_{N_x+1}(\mathbb{R})$ $\forall (j,l) \in [\![0, N_y]\!]$

et le vecteur b

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \hline b_1 \\ \hline \vdots \\ \hline b_{N_y} \end{pmatrix}$$

où $b_j \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ $\forall j \in [\![0, N_y]\!]$

$h_x = h_y = h$



$$\begin{pmatrix} U_{0,0} \\ U_{1,0} \\ \vdots \\ U_{N_x,0} \\ \hline U_{0,1} \\ U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{N_x,1} \\ \vdots \\ \hline U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{N_x,j} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{0,N_y-1} \\ U_{1,N_y-1} \\ \vdots \\ U_{N_x,N_y-1} \\ \hline U_{0,N_y} \\ U_{1,N_y} \\ \vdots \\ U_{N_x,N_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_O(x_0,y_0) \\ -2h_y \times g_S(x_1,y_0) \\ \vdots \\ -2h_y \times g_S(x_{N_x-1},y_0) \\ g_E(x_{N_x},y_0) \\ \hline g_O(x_0,y_1) \\ f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{N_x-1,1} \\ g_E(x_{N_x},y_1) \\ \hline \vdots \\ \hline \cancel{h_y}\, g_O(x_0,y_{N_y}) \\ -2h_y\, g_N(x_1,y_{N_y}) \\ \vdots \\ -2h_y\, g_N(x_{N_x-1},y_{N_y}) \\ g_E(x_{N_x},y_{N_y}) \end{pmatrix}$$

γ.

$\alpha = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$ $\beta = \frac{1}{h_x^2}$ $\mu = \frac{1}{h_y^2}$

On note

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -3 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 4 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \mu & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -\beta & \alpha & -\beta \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{F} & \mathbb{G} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \mathbb{D} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} \\ 0 & & 0 & \mathbb{G} & \mathbb{F} & \mathbb{E} \end{pmatrix}$$

II/ Méthodes des différences finies (2D en espace)

(b) Pb modèle instationnaire : l'équation de la chaleur

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu\Delta u(t,x) = f(t,x) & \forall t\in]0,T] \quad \forall x\in\Omega \\ u(0;x) = u_0(x) & \forall x\in\Omega \\ u_{|\Gamma_0}(t;x) = g_0(t,x) & \forall x\in\Gamma_0 \\ u_{|\Gamma_E}(t;x) = g_E(t,x) & \forall x\in\Gamma_E \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|(t;x) = g_N(t,x) & \forall x\in\Gamma_N \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)(t;x) = g_S(t,x) & \forall x\in\Gamma_S \end{cases}$$

$x=(x,y)$; $\Omega =]a,b[\times]c,d[$

C.I. (condition initiale : 2ᵉ ligne)

C.L. $\forall t\in]0,T]$ (conditions aux limites : 4 dernières lignes)

α constante réelle.

On pose

$x_i = a + i h_x$ avec $h_x = \dfrac{b-a}{N_x}$ $\quad\forall i\in[\![0,N_x]\!]$

$y_j = c + j h_y$ avec $h_y = \dfrac{d-c}{N_y}$ $\quad\forall j\in[\![0,N_y]\!]$

$t^n = n\Delta t$ avec $\Delta t = T/N$ $\quad\forall n\in[\![0,N]\!]$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t^n;x_i,y_j) - \nu\Delta u(t^n;x_i,y_j) = f(t^n;x_i,y_j) & \forall i\in[\![1,N_x-1]\!]\ \forall j\in[\![1,N_y-1]\!] \\ u(t^0;x_i,y_j) = u_0(x_i,y_j) & \forall i\in[\![0,N_x]\!]\ \forall j\in[\![0,N_y]\!] \\ u(t^n,x_0,y_j) = g_0(t^n,x_0,y_j) & \forall j\in\ldots \\ u(t^n,x_{N_x},y_j) = g_E(t^n;x_{N_x},y_j) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t^n,x_i,y_{N_y}) = g_N(t^n,x_i,y_{N_y}) & \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)(t^n;x_i,y_0) = g_S(t^n,x_i,y_0) & \end{cases} \qquad \forall n\in]\!]0,N]\!]$$

Les données du problème (1) sont

- a, b, c, d 4 réels $a<b$ et $c<d$
- $\nu\in\mathbb{R}^{+,*}$
- $f : [0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$
- $u_0 : \Omega\to\mathbb{R}$
- $g_0 : \Gamma_0\to\mathbb{R}$
- $g_E : \Gamma_E\to\mathbb{R}$
- $g_N : \Gamma_N\to\mathbb{R}$
- $g_S : \Gamma_S\to\mathbb{R}$
- ~~g_0,~~
- $\alpha\in\mathbb{R}$

pour la discrétisation

- $N_x\in\mathbb{N}^*$
- $N_y\in\mathbb{N}^*$
- $N\in\mathbb{N}^*$

Schéma implicite Euler $\qquad u^n_{i,j} \sim u(t^n, x_i, y_j)$

$$
(2)\begin{cases}
\text{(a)} & \dfrac{u^n_{i,j}-u^{n-1}_{i,j}}{\Delta t} - \nu\left(\dfrac{u^n_{i+1,j}-2u^n_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u^n_{i,j+1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j-1}}{h_y^2}\right) = f^n_{i,j} \qquad \forall n \in]\!]0,N]\!] \quad \forall i \in]\!]0,N_x[\![\quad \forall j \in]\!]0,N_y[\![\\
\text{(b)} & u^0_{i,j} = u_0(x_i,y_j) \qquad \forall i \in [\![0,N_x]\!] \quad \forall j \in [\![0,N_y]\!] \\
\text{(c)} & u^n_{0,j} = g_O(t^n; x_0, y_j) \qquad \forall j \in [\![0,N_y]\!] \quad \forall n \in]\!]0,N_t]\!] \\
\text{(d)} & u^n_{N_x,j} = g_E(t^n; x_{N_x}, y_j) \qquad '' \\
\text{(e)} & \dfrac{u^n_{i,N_y-2}-4u^n_{i,N_y-1}+3u_{i,N_y}}{2h_y} = g_N(t^n, x_i, y_{N_y}) \qquad \forall i \in]\!]0,N_x[\![\quad \forall n \in]\!]0,N_t]\!] \\
\text{(f)} & -\dfrac{-3u^n_{i,0}+4u^n_{i,1}-u^n_{i,2}}{2h_y} + \alpha u^n_{i,0} = g_S(t^n, x_i, y_0) \qquad ''
\end{cases}
$$

(2)-(a) $\Leftrightarrow$

$$u^n_{i,j}\left(1+\nu\left(\frac{2\Delta t}{h_x^2}+\frac{2\Delta t}{h_y^2}\right)\right) - \nu\frac{\Delta t}{h_x^2}\left(u^n_{i+1,j}+u^n_{i-1,j}\right) - \nu\frac{\Delta t}{h_y^2}\left(u^n_{i,j+1}+u^n_{i,j-1}\right) = u^{n-1}_{i,j} + \Delta t\, f_{i,j}$$

car

$$u^n_{i,j} - \nu\Delta t\left(\frac{u^n_{i+1,j}-2u^n_{i,j}+u^n_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u^n_{i,j+1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j-1}}{h_y^2}\right) = u^{n-1}_{i,j} + \Delta t\, f_{i,j}$$

$\Leftrightarrow$

$$\beta u^n_{i,j} + \beta_x\left(u^n_{i+1,j}+u^n_{i-1,j}\right) + \beta_y\left(u^n_{i,j+1}+u^n_{i,j-1}\right) = u^{n-1}_{i,j} + \Delta t\, f_{i,j}$$

avec $\beta = 1+\nu\left(2\dfrac{\Delta t}{h_x^2} + 2\dfrac{\Delta t}{h_y^2}\right)$

$\beta_x = -\nu\dfrac{\Delta t}{h_x^2}$

$\beta_y = -\nu\dfrac{\Delta t}{h_y^2}$

On pose $\mathcal{U}^n$ vecteur de dimension $(N_x+1)\times(N_y+1)$

$$\mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0^n \\ \hline \mathcal{U}_1^n \\ \hline \vdots \\ \hline \mathcal{U}_{N_y}^n \end{pmatrix} \quad \text{où chaque } \mathcal{U}_j^n \in \mathbb{R}^{N_x+1} \quad \forall j \in [\![0, N_y]\!]$$

$$\text{et } \mathcal{U}_j = \begin{pmatrix} U_{0,j}^n \\ \vdots \\ U_{N_x,j}^n \end{pmatrix}$$

Grâce au schéma (2) on peut calculer $\mathcal{U}^n$ en fonction de $\mathcal{U}^{n-1}$ (equation (2)-(4))
en résolvant un système linéaire (où la matrice est indépendante de n)

L'algorithme de base est donc

$\mathcal{U}^0$ donné par la C.I.
pour $n \leftarrow 1$ à N
  résoudre $\mathbb{A}\,\mathcal{U}^n = b^n$
Finpour

La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ et $b^n \in \mathbb{R}^d$ avec $d = (N_x+1)\times(N_y+1)$

On écrit la matrice $\mathbb{A}$ sous forme de blocs de dimension N_x+1

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{0,0} & \cdots & \mathbb{A}_{0,N_y} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{N_y,0} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,N_y} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}_{j,l} \in \mathcal{M}_{N_x+1}(\mathbb{R}) \quad \forall (j,l) \in [\![0,N_y]\!]^2$$

et le vecteur b^n

$$b^n = \begin{pmatrix} b_0^n \\ \hline \vdots \\ \hline b_{N_y}^n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad b_j \in \mathbb{R}^{N_x+1} \quad \forall j \in [\![0,N_y]\!]$$

$$\mathbb{A} U^n = b^n \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \text{block } j \{ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{0,0} & \cdots & \mathbb{A}_{0,N_y} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{j,0} & \cdots & \mathbb{A}_{j,N_y} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{N_y,0} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,N_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^n \\ \vdots \\ U_j^n \\ \vdots \\ U_{N_y}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0^n \\ \vdots \\ b_j^n \\ \vdots \\ b_{N_y}^n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

On a donc $\forall j \in [\![0, N_y]\!]$

$$\sum_{\ell=0}^{N_y} \mathbb{A}_{j,\ell} U_\ell^n = b_j^n \in \mathbb{R}^{N_x+1}$$

qui correspondent à N_x+1 lignes de ~~notre~~ système (3)

On va faire "porter" à la ligne $i \in [\![0, N_x]\!]$ l'équation linéaire associée au point (x_i, y_j)

* $\boxed{\text{block } j=0}$

pour $j=0$, les equations sont

$$(c) \Rightarrow U^n_{0,0} = g_O(t^n, x_0, y_0) \qquad (i=0)$$

$$(f) \Rightarrow -\frac{-3U^n_{i,0} + 4U^n_{i,1} - U^n_{i,2}}{2h_y} + \alpha U^n_{i,0} = g_S(t^n, x_i, y_0) \qquad \forall i \in]\!]0, N_x[\![$$

$$(d) \Rightarrow U^n_{N_x,0} = g_E(t^n, x_{N_x}, y_0)$$

(f) s'écrit aussi

$$\underbrace{(2h_y\alpha + 3)}_{\mu} U^n_{i,0} - 4U^n_{i,1} + U^n_{i,2} = \cancel{g_S}\, 2h_y\, g_S(t^n, x_i, y_0)$$

D'où

$$\left(\mathbb{A}_{0,0} \,\vdots\, \mathbb{A}_{0,1} \,\vdots\, \mathbb{A}_{0,2} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbb{A}_{0,N_y} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & \mu & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_{0,0}} &
\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & -4 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_{0,1}} &
\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_{0,2}} &
0 & \cdots & 0
\end{array} \right)$$

et

$$b^n_0 = \begin{pmatrix} g_O(t^n, x_0, y_0) \\ 2h_y\, g_S(t^n, x_1, y_0) \\ \vdots \\ 2h_y\, g_S(t^n, x_{N_x-1}, y_0) \\ g_E(t^n, x_{N_x}, y_0) \end{pmatrix}$$

* $\boxed{\text{block} \quad j}$ $(j \in]\!]0, N_y[\![)$

pour $j \in]\!]0, N_y[\![$ les equations sont

$$(c) \Rightarrow U_{0,j}^n = g_0(t^n, x_0, y_j) \qquad (i=0)$$

$$(a) \Rightarrow U_{i,j}^n - \nu\Delta t \left(\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) = U_{i,j}^{n-1} + \Delta t\, f_{i,j}^n \qquad (i \in]\!]0, N_x[\![)$$

$$(e) \Rightarrow U_{N_x,j}^n = g_E(t^n, x_{N_x}, y_j) \qquad (i = N_x)$$

(a) s'ecrit aussi

$$\lambda U_{i,j}^n + \lambda_x (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n) + \lambda_y (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) = U_{i,j}^{n-1} + \Delta t\, f_{i,j}^n$$

avec $\lambda = 1 - 2\nu\Delta t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)$

$\lambda_x = -\nu \frac{\Delta t}{h_x^2}$, $\lambda_y = -\nu \frac{\Delta t}{h_y^2}$

D'où

$$\left(\mathbb{A}_{j,0} \,\vdots\, \mathbb{A}_{j,1} \,\vdots\, \mathbb{A}_{j,2} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbb{A}_{j,N_y} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
0 & 0 & \cdots & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_y & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & \lambda_y & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbb{A}_{j,j-1}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_x & \lambda & \lambda_x & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 \\ & & \lambda_x & \lambda & \lambda_x \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbb{A}_{j,j}} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_y & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & \lambda_y & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbb{A}_{j,j+1}} & 0 & 0
\end{array} \right)$$

et $$b_j^n = \begin{pmatrix} g_0(t^n, x_0, y_j) \\ U_{1,j}^n + \Delta t\, f_{1,j}^n \\ \vdots \\ U_{N_x-1,j}^n + \Delta t\, f_{N_x-1,j}^n \\ g_E(t^n, x_{N_x}, y_j) \end{pmatrix}$$

* $\boxed{\text{block} \quad j = N_y}$

pour $j = N_y$, les equation sont

$$(c) \Rightarrow \quad U^n_{0,N_y} = g_0(t^n, x_0, y_{N_y}) \qquad (i = 0)$$

$$(e) \Rightarrow \quad \frac{U_{i,N_y-2} - 4U_{i,N_y-1} + 3U_{i,N_y}}{2h_y} = g_N(t^n, x_i, y_{N_y}) \qquad \forall i \in]\!]0, N_x[\![$$

$$(d) \Rightarrow \quad U^n_{N_x,N_y} = g_E(t^n, x_{N_x}, y_{N_y}) \qquad (i = N_x)$$

(e) s'écrit aussi

$$U_{i,N_y-2} - 4U_{i,N_y-1} + 3U_{i,N_y} = 2h_y \; g_N(t^n, x_i, y_{N_y})$$

D'où

$$\left(\mathbb{A}_{N_y,0} \;\Big|\; \cdots\cdots \;\Big|\; \mathbb{A}_{N_y,N_y-2} \;\Big|\; \mathbb{A}_{N_y,N_y-1} \;\Big|\; \mathbb{A}_{N_y,N_y} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & \overset{\mathbb{A}_{N_y,N_y-2}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}} & \overset{\mathbb{A}_{N_y,N_y-1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & -4 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}} & \overset{\mathbb{A}_{N_y,N_y}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 3 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} \right)$$

et

$$b^n_{N_y} = \begin{pmatrix} g_0(t^n, x_0, y_{N_y}) \\ 2h_y \, g_N(t^n, x_1, y_{N_y}) \\ \vdots \\ 2h_y \, g_N(t^n, x_{N_x}, y_{N_y}) \\ g_E(t^n, x_{N_x}, y_{N_y}) \end{pmatrix}$$