

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.O.

1 Problèmes de Cauchy

EXERCICE 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

- (a)
$$\begin{cases} y''(t) + \alpha y'(t) + \beta \cos(y(t)) = \sin(t), & t \in]0, 2\pi] \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1. \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v(t) = e, & t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$$
- (c)
$$\begin{cases} y''(t) = \mu(1 - y^2(t))y'(t) - y(t), & t \in]0, 10] \\ y(0) = 1, & y'(0) = 1. \end{cases}$$
- (d)
$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

2 Dérivation numérique

EXERCICE 2

On note $t^n = a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et $h = (b - a)/N$ une **discrétisation régulière de $[a, b]$** . Soit $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (2.1)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (2.2)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (2.3)$$

Q. 1 Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\xi_P \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\xi_R \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$(Dy)_n^P = y'(t^n) + \frac{h}{2}y''(\xi_P)$$

et

$$(Dy)_n^R = y'(t^n) - \frac{h}{2}y''(\xi_R)$$

2. En déduire que

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^P| \leq Ch, \quad \text{avec } C = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y''(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^R| \leq Dh, \quad \text{avec } D = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y''(t)|$$

3. Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour les différences finies progressive et régressive. ■

Q. 2 Soit $y \in C^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\xi_2 \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$(Dy)_n^C = y'(t^n) + \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2))$$

2. En déduire que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^C| \leq Eh^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

3. Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour la différence finie centrée. ■

3 Schémas

EXERCICE 3

On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \tag{3.1}$$

$$y(0) = 0. \tag{3.2}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 1. Soit $a, b, a < b$ deux réels. Ecrire une fonction DISREG retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.

2. Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (3.1-3.2) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...

3. Quel est le lien entre $y^{[n]}$ et la fonction y .

4. Ecrire une fonction EULERPROG retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.

5. Ecrire un algorithme complet de résolution de (3.1-3.2) par le schéma d'Euler progressif. ■

Le schéma d'Euler progressif est d'ordre 1.

Q. 2 1. Expliquer comment retrouver numériquement cet ordre (en utilisant la solution exacte de (3.1-3.2)).

2. Proposer un algorithme mettant en oeuvre cette technique. ■

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

- Q. 3** 1. Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler régressif pour résoudre le problème (3.1-3.2) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...
2. Ecrire une fonction `EULERREG` retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler régressif. On pourra utiliser la fonction `POINTFIXE` de paramètres ϕ , x_0 , tol , $nmax$ retournant une approximation du point x tel que $\phi(x) = x$. L'algorithme utilisé par cette fonction est une méthode de point fixe avec pour point initial x_0 , une tolérance de tol , un nombre maximum d'itération $nmax$.
3. Ecrire un algorithme complet de résolution de (3.1-3.2) par le schéma d'Euler régressif. ■