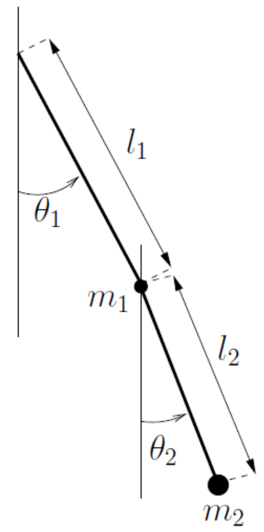
Travaux dirigés - E.D.O. 3

Exercice 1

A la masse du pendule simple, on accroche un second pendule de manière à être dans la configuration suivante :



On peut montrer que les équations du mouvement (sans viscosité) sont données par :

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1\theta_1''(t)+m_2l_2\theta_2''(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))+m_2l_2(\theta_2'(t))^2\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))+(m_1+m_2)g\sin(\theta_1(t)) &= 0\\ l_1\theta_1''(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))+l_2\theta_2''(t)-l_1(\theta_1'(t))^2\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))+g\sin(\theta_2(t)) &= 0\end{aligned}$$

Q. 1 *Montrer que ce problème peut se mettre sous la forme*

$$\mathbb{M}(t)\begin{pmatrix}\theta_1''(t)\\ \theta_2''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

où

- $\mathbb{M}(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, m_1, m_2, l_1, l_2,
- $b_1(t)\in\mathbb{R}$ *dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_2'(t)$, m_1, m_2, l_2,
- $b_2(t)\in\mathbb{R}$ *dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_1'(t)$, l_1.

On explicitera $\mathbb{M}(t)$, $b_1(t)$ *et* $b_2(t)$. ∎

Q. 2
1. *Démontrer que la matrice* $\mathbb{M}(t)$ *est inversible.*
2. *Calculer son inverse.*
3. *Sous des conditions initiales à préciser, en déduire que les équations du mouvement précédantes peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy que l'on explicitera.* ∎

Q. 3 *Montrer que ce problème peut se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy que l'on explicitera en détails.* ∎

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]}=\boldsymbol{y}^{[n]}+h\boldsymbol{\Phi}(t^n,\boldsymbol{y}^{[n]},h) \tag{1.2}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h \sum_{j=1}^{q} b_{i,j} \boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.3}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 : le tableau de Butcher associé s'écrit

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \tag{1.4}$$

Q. 4 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 associé au tableau de Butcher (1.4).* ∎

Q. 5 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab* REDRK4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel $m > 1$) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.* ∎

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right) \tag{1.5}$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{1.6}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 6
1. *Les schémas 1.5 et 1.6, sont-ils explicites ou implicites?*
2. *Expliquer le principe d'une méthode de prédiction-correction utilisant les schémas 1.5 et 1.6.* ∎

Q. 7 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPRECOR4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas.* ∎

Q. 8 (Matlab) *On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que*

$$y'(t) = \sin(t) + 2t, \ \forall t \in [0, 2] \tag{1.7}$$

$$y(0) = 0. \tag{1.8}$$

dont la solution exacte est $y(t) = -\cos(t) + t^2$.

1. *Ecrire un programme Matlab permettant de comparer graphiquement les solutions numériques calculées par la méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et par la méthode de prédiction-correction précédentes avec la solution exacte.*
2. *Ecrire un programme Matlab permettant de retrouver graphiquement l'ordre des deux méthodes calculé numériquement.* ∎

Q. 9 (Matlab)
1. *Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre numériquement, par la méthode de votre choix, le problème 1.1 avec conditions initiales.*
2. *Donner la(les) commande(s) permettant de représenter sur une figure les approximations de θ_1 et θ_1' et sur une autre les approximations de θ_2 et θ_2'.* ∎