

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.P. 1

**EXERCICE 1**

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \forall x \in ]a; b[, \quad (1.1)$$

$$u'(a) = \alpha, \quad (1.2)$$

$$u(b) = \beta. \quad (1.3)$$

- Q. 1** 1. Quelles sont les données du problème (1.1) à (1.3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
2. Quelles sont les inconnues du problème (1.1) à (1.3)? (préciser le type)
3. Quelles sont les conditions initiales?
4. Quelles sont les conditions aux limites? ▪

**Q. 2** Construire une discrétisation de  $[a; b]$  avec  $N$  pas de discrétisation en espace. ▪

On note  $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  cette discrétisation. On souhaite résoudre (1.1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (1.4)$$

- Q. 3** 1. Expliquer comment le schéma (1.4) a été obtenu à partir de (1.1) et préciser ce que représente les termes  $u_i, f_i, c_i$  et  $\Delta x$ ?
2. Donner l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valeurs que peuvent prendre  $i$  dans le schéma (1.1).
3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ▪

On note  $\mathbf{V}$  le vecteur de dimension  $N + 1$ , de composantes  $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** Montrer que le vecteur  $\mathbf{V}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{b} \quad (1.5)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{b}$  (préciser les dimensions). ▪

**Q. 5** Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1.1) à (1.3) basé sur (1.5). (Utiliser au maximum les fonctions) ▪

On note  $\mathbf{W}$  le vecteur de dimension  $N$ , de composantes  $\mathbf{W}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

**Q. 6** Montrer que le vecteur  $\mathbf{W}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{M}\mathbf{W} = \mathbf{d} \quad (1.6)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{M}$  et le vecteur  $\mathbf{W}$  (préciser les dimensions). ▪

**Q. 7** Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1.1) à (1.3) basé sur (1.6). (Utiliser au maximum les fonctions) ▪

**EXERCICE 2**

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), \forall (t, x) \in ]t_0; t_0 + T] \times ]a; b[, \quad (2.1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \forall x \in [a; b], \quad (2.2)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \forall t \in [t_0; t_0 + T], \quad (2.3)$$

$$u(t, b) = u_b(t), \forall t \in [t_0; t_0 + T]. \quad (2.4)$$

avec  $\nu$  un réel strictement positif,  $t_0 \in \mathbb{R}, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ .

**Q. 1** 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. L'E.D.P. (2.1) est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique? Justifier.

3. Quelles sont les données du problème (2.1) à (2.4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

4. Quelles sont les inconnues du problème (2.1) à (2.4)? (préciser le type)

5. Quelles sont les conditions initiales?

6. Quelles sont les conditions aux limites? ■

On note  $t^n$ ,  $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$  et  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$  les discrétisations régulières des intervalles  $[t_0; t_0 + T]$  et  $[a; b]$  avec  $N_t$  pas de discrétisation en temps et  $N_x$  pas de discrétisation en espace.

**Q. 2** Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des  $t^n$  et des  $x_i$ . ■

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \quad (2.5)$$

**Q. 3** 1. A quoi correspondent les valeurs  $u_i^{n+1}$ ,  $f_i^{n+1}$ ,  $\Delta t$  et  $\Delta x$ ?

2. Expliquer comment le schéma (2.5) a été obtenu à partir de (2.1).

3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (2.1) à (2.4)

4. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace? ■

On note  $\mathbf{U}^n$  les vecteurs de dimension  $N_x + 1$ , de composantes  $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** 1. Comment initialiser le vecteur  $\mathbf{U}^0$ ?

2. En supposant le vecteur  $\mathbf{U}^n$  déjà calculé, montrer que le vecteur  $\mathbf{U}^{n+1}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{b}^n \quad (2.6)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{b}^n$  (préciser les dimensions). ■

**Q. 5** 1. Ecrire la fonction ASSEMBLEMAT1D retournant la matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels donnés.

2. On suppose les données du problème (2.1) à (2.4) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  déjà implémentée :  $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ .

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.1) à (2.4) en utilisant le schéma (2.5). ■