Travaux dirigés - E.D.P. 2

Exercice 1

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) &= f(x,y),\ \forall (x,y)\in]a;b[\times]c,d[, && (1.1)\\
u(a,y) &= u_a(y),\ \forall y\in[c,d], && (1.2)\\
u(b,y) &= u_b(y),\ \forall y\in[c,d], && (1.3)\\
u(x,c) &= u_c(x),\ \forall x\in[a,b], && (1.4)\\
u(x,d) &= u_d(x),\ \forall x\in[a,b],. && (1.5)
\end{aligned}$$

avec a, b, c et d quatre réels, $a<b$ et $c<d$.

Q. 1 1. *L'E.D.P. (1.1) est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique? Justifier.*

2. *Quelles sont les données du problème* (1.1) *à* (1.5)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelles sont les inconnues du problème* (1.1) *à* (1.5)*? (préciser le type)*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*
5. *Quelles propriétés les conditions aux limites doivent-elles vérifier?* ▪

On note x_i, $i\in[\![0,N_x]\!]$ et y_j, $j\in[\![0,N_y]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[a;b]$ et $[c;d]$ avec N_x pas de discrétisation en x et N_y pas de discrétisation en y. On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}-\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}=f_{i,j}. \tag{1.6}$$

Q. 2 1. *A quoi correspondent les valeurs $u_{i,j}$, $f_{i,j}$, Δx et Δy?*

2. *Expliquer comment le schéma* (1.6) *a été obtenu à partir de* (1.1)*.*
3. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1.1) *à* (1.5)
4. *Le schéma est de quel ordre?* ▪

On note $\boldsymbol{U}$ le vecteur de dimension $d=(N_x+1)(N_y+1)$, écrit sous forme blocs :

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_0\\ \hline \boldsymbol{U}_1\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{U}_{N_y}\end{pmatrix}\ \text{avec}\ \boldsymbol{U}_j=\begin{pmatrix}u_{0,j}\\ u_{1,j}\\ \vdots\\ u_{N_x,j}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{N_x+1},\ \forall j\in[\![0,N_y]\!].$$

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$ (préciser les dimensions). ▪

Q. 4 1. *Ecrire la fonction* AssembleMatD *retournant la matrice $\mathbb{D}\in\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \beta & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \beta & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

où α et β sont des réels donnés.

2. *Soient $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{E}$, trois matrices de $\mathcal{M}_n(R)$ données. Ecrire la fonction* AssembleMat2D *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec $d = n \times m$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{D} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mathbb{E} & \mathbb{B} & \mathbb{E} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{E} & \mathbb{B} & \mathbb{E} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbb{D} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

3. *On suppose les données du problème* (1.1) *à* (1.5) *fournies et les fonctions* AssembleMatD, AssembleMat2D *et* RSL *(résolution de système linéaire : $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$) déjà implémentée.*
Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1.1) *à* (1.5) *en utilisant le schéma* (1.6). ■

Exercice 2

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) + \nu u(x,y) &= f(x,y),\ \forall (x,y) \in]a;b[\times]c,d[, & (2.1) \\ u(a,y) &= u_a(y),\ \forall y \in [c,d], & (2.2) \\ u(b,y) &= u_b(y),\ \forall y \in [c,d], & (2.3) \\ u(x,c) &= u_c(x),\ \forall x \in [a,b], & (2.4) \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,d) &= v_d(x),\ \forall x \in]a,b[,. & (2.5) \end{aligned}$$

où a, b, c, d, sont quatre réels ($a < b$, $c < d$), ν est un réel strictement positif et $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure au domaine $[a,b] \times [c,d]$.

Q. 1 1. *Soit $x \in]a,b[$. Rappeler la définition de $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,d)$ et en déduire que $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,d) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,d)$.*

2. *L'E.D.P. (2.1) est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique? Justifier.*

3. *Quelles sont les données du problème* (2.1) *à* (2.5)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

4. *Quelles sont les inconnues du problème* (2.1) *à* (2.5)*? (préciser le type)*

5. *Quelles sont les conditions aux limites?*

6. *Quelles propriétés les conditions aux limites doivent-elles vérifier?* ■

On note x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ et y_j, $j \in [\![0, N_y]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[a;b]$ et $[c;d]$ avec N_x pas de discrétisation en x et N_y pas de discrétisation en y. On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \nu u_{i,j} &= f_{i,j}, & (2.6) \\ \frac{u_{i,N_y-2} - 4u_{i,N_y-1} + 3u_{i,N_y}}{2\Delta y} &= v_d(x_i). & (2.7) \end{aligned}$$

Q. 2 1. *A quoi correspondent les valeurs $u_{i,j}$, $f_{i,j}$, Δx et Δy?*

2. *Expliquer comment le schéma* (2.6) *a été obtenu à partir de* (2.1).

3. *Expliquer comment le schéma* (2.7) *a été obtenu à partir de* (2.5).

4. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (2.1) *à* (2.5) *en utilisant les schémas* (2.6) *et* (2.7).

5. *Le schéma est de quel ordre?* ■

On note $\boldsymbol{U}$ le vecteur de dimension $d = (N_x + 1)(N_y + 1)$, écrit sous forme blocs :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \hline \boldsymbol{U}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{U}_{N_y} \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{U}_j = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x+1}, \ \forall j \in [\![0, N_y]\!].$$

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{b} \tag{2.8}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$ (préciser les dimensions). ▪

Q. 4
1. *Ecrire la fonction* AssembleMatD *retournant la matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

   où α et β sont des réels donnés.

2. *Soient $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$, six matrices de $\mathcal{M}_n(R)$ données. Ecrire la fonction* AssembleMat2D *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec $d = n \times m$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{D} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mathbb{E} & \mathbb{B} & \mathbb{E} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{E} & \mathbb{B} & \mathbb{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{F} & \mathbb{G} & \mathbb{H} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

3. *On suppose les données du problème* (2.1) *à* (2.5) *fournies et les fonctions* AssembleMatD, AssembleMat2D *et* RSL *(résolution de système linéaire : $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$) déjà implémentée.*
   Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.1) *à* (2.5) *en utilisant les schémas* (2.6) *et* (2.7). ▪