Energétique I — **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée — **Année 2012-2013**

Travaux pratiques - E.D.P.

Groupes B1 à B6

Travail individuel

Table des matières

1 Différences finies 1D

1.1 Problème modèle DD

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[&& (1.1)\\ u(a) &= u_a \in \mathbb{R} && (1.2)\\ u(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (1.3) \end{aligned}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0,\ b = 2\pi,\ f(x) = \cos(x) + 4\sin(2x),\ u_a = 1$ et $u_b = 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + \sin(2x)$.

On définie la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction* ***Lap1D*** *(fichier* Lap1D.m*) permettant de générer cette matrice.* ▪

Le programme fourni (fichier `Edp0.m`), utilisant la fonction précédante, permet de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Dans ce programme, la variable `x` contient l'ensemble des x_i, $i \in [\![0, N]\!]$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a;b]$ définie par

$$x_i = a + ih, \text{ avec } h = (b-a)/N.$$

Q. 2 *Ecrire le programme* OrdreEdp0 *(fichier* OrdreEDP0.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique d'afficher l'ordre de la méthode.* ▪

Q. 3 *Ecrire le programme* Edp1 *(fichier* Edp1.m*) permettant de calculer et représenter une solution approchée de :*

$$\begin{aligned} -u''(x) + \nu u(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[&& (1.4)\\ u(a) &= u_a \in \mathbb{R} && (1.5)\\ u(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (1.6)\end{aligned}$$

avec $\nu \geqslant 0$. ■

A faire

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-Q1aQ3` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'execution des programmes demandés en Q1 à Q3. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** "`<NOM> TP2 Q1 a Q3`".

1.2 Problème modèle ND

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[&& (1.7)\\ u'(a) &= v_a \in \mathbb{R} && (1.8)\\ u(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (1.9)\end{aligned}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x)$, $v_a = 2$ et $u_b = 4\pi$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

1.2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 4 *Ecrire le programme* Edp2 *(fichier* Edp2.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédant.* ■

Q. 5 *Ecrire le programme* OrdreEdp2 *(fichier* OrdreEDP2.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

1.2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 6 *Ecrire le programme* Edp2 *(fichier* Edp2.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédant.* ■

Q. 7 *Ecrire le programme* OrdreEdp2 *(fichier* OrdreEDP2.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

A faire

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-Q4aQ7` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'execution des programmes demandés en Q4 à Q7. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** "`<NOM> TP2 Q4 a Q7`".

2 Les Différences Finies pour l'équation de la chaleur

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x), \ \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T] \times]a;b[, & (2.1)\\
u(t_0,x) &= u_0(x), \ \forall x \in [a;b], & (2.2)\\
u(t,a) &= u_a(t), \ \forall t \in [t_0; t_0+T], & (2.3)\\
u(t,b) &= u_b(t), \ \forall t \in [t_0; t_0+T]. & (2.4)
\end{aligned}$$

avec ν un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

On souhaite implémenter deux schémas de résolution de cette E.D.P. :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \tag{2.5}$$

et

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} = f_i^{n}. \tag{2.6}$$

où $\Delta t = T/N_t$, $\Delta x = (b-a)/N_x$, $f_i^n = f(t^n, x_i)$ et $u_i^n \approx u(t^n, x_i)$.

On rappelle que le premier schéma est le **schéma d'Euler implicite** et le second le **schéma d'Euler explicite**. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnelement stable et le schéma d'Euler explicite est stable sous la condition de C.F.L.

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

On note, $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$, $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Q. 8 *Pour chaque schéma, écrire sur feuille et* ***de manière détaillée*** *la discrétisation de l'E.D.P. (2.1) à (2.4)* ▪

On étudie cette E.D.P. avec les données $t_0 = 0$, $T = 2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $\nu = 2$, $k = 5$

$$\begin{aligned}
f(t,x) &= -k\sin(kt)\cos(x) + \nu\cos(kt)\cos(x),\\
u_0(x) &= \cos(kt_0)\cos(x),\\
u_a(t) &= \cos(kt)\cos(a),\\
u_b(t) &= \cos(kt)\cos(b).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par $u_{\text{ex}}(t,x) = \cos(kt)\cos(x)$.

Q. 9 1. *Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'****Euler implicite****, le programme `mainChaleurImplicite.m` (script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions `CalculF.m`, `NormInf.m` et `PlotSol.m` (voir fichier `CodesChaleurImplicite.tar.gz`). Dans les codes fournis, il manque le fichier `ChaleurImplicite.m` correspondant à la fonction :*

```
[t,x,u]=ChaleurImplicite(EDP,Nt,Nx)
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler implicite avec
- `EDP` *: structure, définie dans* `Q2mainIm.m`*, contenant l'ensemble des données de l'E.D.P. à résoudre.*
- `Nt` *: nombre de pas de discrétisation en temps,*
- `Nx` *: nombre de pas de discrétisation en espace,*
- `t` *: discrétisation en temps (dimension* `Nt+1`*),* $\texttt{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in [\![1, N_t+1]\!]$,
- `x` *: discrétisation en espace (dimension* `Nx+1`*),* $\texttt{x}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$,
- `u` *: u(i,n) solution approchée au temps t(n) et point x(i) (dimension (*`Nx+1,Nt+1`*)),*

Ecrire cette fonction.

2. *Utiliser le **Profiler** de Matlab pour comparer les temps d'execution de la fonction* `ChaleurImplicite` *dans les cas ou la matrice est stockée de manière pleine ou creuse. Pour celà, executer dans le profiler la commande* `[t,x,u]=ChaleurImplicite(EDP,5000,500);` *dans les deux cas et réaliser dans chaque cas un SnapShot (capture d'écran) que l'on nommera* `ProfilerMatFull` *et* `ProfilerMatSparse` *(format PNG sous Linux).* ■

Q. 10 1. *Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'**Euler explicite**, le programme* `mainChaleurExplicite.m` *(script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions* `CalculF.m`, `NormInf.m` *et* `PlotSol.m`. *(voir fichier* `CodesChaleurImplicite.tar.gz`*). Dans les codes fournis, il manque le fichier* `EulerExplicite.m` *correspondant à la fonction :*

```
[t,x,u]=ChaleurExplicite(EDP,Nt,Nx)
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler explicite. Les paramètres sont identiques à ceux de la fonction `ChaleurImplicite.m`

2. *Dans le programme* `mainChaleurExplicite.m`, *changer le paramètre* `Nt` *de* 2100 *à* 2000. *Que se passe-t'il lors de la résolution ?* ■

A faire

- ◇ Rendre la(les) feuilles contenant la réponse a la question Q8. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chacune des feuilles et de les numéroter.
- ◇ Créer les 2 archives compressées nommées `<NOM>-TP2-Q9` et `<NOM>-TP2-Q10` contenant respectivement l'ensemble des fichiers nécessaires à l'execution des programmes demandés en Q9 et Q10. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** `"<NOM> TP2 Q9a10"` et en fichiers joints les 2 archives compressées créées précédement ainsi que les captures d'écran (fichiers `ProfilerMatFull.png` et `ProfilerMatSparse.png`) de Q9.

Comme première application, résoudre numériquement par le schéma implicite d'Euler le problème de conduction thermique dans une barre de longueur $L = 6$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= 0,\ \forall (t,x) \in]0;T]\times]0;L[, && (2.7)\\
u(t_0,x) &= u_0(x),\ \forall x \in [0;L], && (2.8)\\
u(t,0) &= u_g(t),\ \forall t \in [0;T], && (2.9)\\
u(t,L) &= u_d(t),\ \forall t \in [0;T]. && (2.10)
\end{aligned}$$

avec $T = 10$, $u_0(x) = 100, \forall x \in [0,L]$

$$u_g(t) = \begin{cases} 100 - 90t, & \forall t \in [0,1] \\ 10,\ \forall t > 1 \end{cases}$$

$$u_d(t) = \begin{cases} 100 - 80t, & \forall t \in [0,1] \\ 20,\ \forall t > 1 \end{cases}$$

Q. 11 1. *Ecrire le programme* `barre1.m` *permettant de résoudre ce problème par le schéma d'Euler implicite.*

2. *Executer ce programme pour différentes valeurs de ν (par exemple $\nu = 0.1$, $\nu = 1$ et $\nu = 10$. Qu'observe-t'on ?* ■

Pour la seconde application, la seule modification par rapport à l'application précédente est que la conductivité thermique est une fonction constante par morceaux en espace :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in [0, \frac{L}{3}] \\ 0.1 & \forall x \in]\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}] \\ 1 & \forall x \in]\frac{2L}{3}, L]. \end{cases}$$

Q. 12 *Ecrire le programme* `barre2.m` *permettant de résoudre ce problème par le schéma d'Euler implicite.* ∎

A faire

◇ Créer l'archive compressée nommée `<NOM>-TP2-Q11a12` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'execution des programmes demandés en Q11 et Q12. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.

◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** "`<NOM> TP2 Q11a12`" et en fichier joint l'archive compressée créée précédement.