

I/ Introduction

⑩ Définitions

Definition 1 E.D.P.

Use equation aux dérivées partielles ^{E.D.P.} fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps, espace, ...) ainsi que les dérivées partielles de la variable dépendante par rapport à ces variables indépendantes. Par ex.

Par exemple, l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{Equation d'advection})$$

est une E.D.P. La variable dépendante est v , les variables indépendantes sont t et x . α peut-être une fonction de t, x et v

Definition 2 Ordre d'une E.D.P.

L'ordre d'une E.D.P. est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'E.D.P.

Definition 3 E.D.P. linéaires / quasi-linéaires / non-linéaires

- On dit qu'une E.D.P. est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante, (contre 0 compris)
- On dit qu'une E.D.P. est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. Sinon elle est non-linéaire

Par exemple l'E.D.P.

$$a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} = c$$

est quasi-linéaire si a, b sont des fonctions de x, y . Elle serait linéaire si a, b et c ne dépendaient que de x et y

De même l'E.D.P.

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = d$$

est quasi linéaire si a, b, c et d sont des fonctions de x, y, v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$
et linéaire si a, b, c et d sont des fonctions de x, y .

2° Classification des EDP linéaire d'ordre 2

Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 générique

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g \quad (1)$$

où u est une fonction de (x, y) et a, b, c, d, e, f, g des fonctions de (x, y)

Le type de l'EDP dépend de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta > 0$: EDP hyperbolique

* $\Delta = 0$: EDP parabolique

* $\Delta < 0$: EDP elliptique

a) EDP hyperbolique : equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Ici $u(x, t)$ est le déplacement vertical de l'onde au temps t et au point x .
 α est la célérité de l'onde.

Pour mettre (2) sous la forme (1), on pose $y = t$ et on identifie :

$$a = -1, b = 0, c = 1 \quad d = e = f = g = 0$$

et on a

$$\Delta = 4 > 0$$

Cette EDP est bien hyperbolique.

b) EDP parabolique : equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

où $u(x, t)$ est la température au temps t et au point x .
 ν est le coefficient de diffusivité thermique.

Pour mettre (3) sous la forme (1), on pose $y = t$ et on identifie

$$a = -1 \quad b = c = d = f = g = 0 \quad e = 1$$

et on a

$$\Delta = 0$$

Cette EDP est bien parabolique

c EDP elliptique : equation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

où $u(x,y)$ peut être un déplacement vertical, un potentiel, ... au point (x,y) de l'espace suivant le problème modélisé.

On a en identifiant (4) à (1)

$$a=c=1, \quad b=d=e=f=g=0$$

et

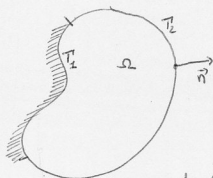
$$\Delta = -4 < 0$$

Cette EDP est bien elliptique.

3) Exemples stationnaires

deformation d'un

a) Membrane elastique



$$\Gamma = \partial\Omega$$

donnée par

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2$$

membrane élastique fixée en Γ_1 et libre en Γ_2
 soumise à une force ~~sur~~ $f(x,y)dx dy$ sur
 chaque élément de surface $dx dy$.
 On cherche le déplacement vertical $v(x,y)$ de
 cette membrane. v est solution de
 Un modèle simplifié de cette membrane est

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega \\ v|_{\Gamma_1} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0 \end{cases} \quad \text{conditions aux limites} \quad \text{C.o.l.}$$

où \vec{n} est la normale extérieure à Ω , l'opérateur Δ est le laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et

$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x,y) = \langle \nabla v(x,y), n(x,y) \rangle$$

$$\text{avec } \nabla v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{gradient de } v)$$

b) Conducteurs thermiques

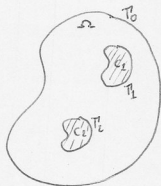
Deux conducteurs thermiques C_1 et C_2 sont dans une enceinte close Ω
 l'extérieur de cette enceinte est à une température de 20°C

Les conducteurs C_1 est à une température de 60°
 et C_2 300°

On attend suffisamment pour attendre l'équilibre thermique

On cherche $v(x,y)$ température au point (x,y) de Ω

un modèle simplifié de



$$\begin{cases} \nabla \cdot (K \nabla v) = 0 & \text{ou } \text{div}(K \cdot \text{grad } v) = 0 \\ v|_{\Gamma_0} = 20^\circ \\ v|_{\Gamma_1} = 60^\circ \\ v|_{\Gamma_2} = 300^\circ \end{cases} \quad \text{C.o.l.}$$

K est la conduction thermique du matériau en $(x,y) \in \Omega$

l'opérateur $\nabla \cdot$ est l'opérateur de divergence :

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$$

Donc

$$\nabla \cdot (X \cdot \nabla u) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} X \frac{\partial u}{\partial x} \\ X \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(X \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(X \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

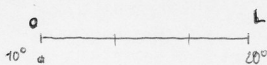
Si X est constant, on retrouve le Laplacien.

4) Exemples stationnaires

a) Conduction thermique dans une barre.

Une barre "isolée de l'extérieur" ^{de longueur L} est à la température de 100°C .
 On la refroidit par ses extrémités qui sont portées ^{de 100°} à 10°C "à gauche"
 et 20° "à droite" en 1 seconde et maintenu à ces températures.

$U(t, x)$ est la température de la barre
 au temps t et au pt $x \in [0, L]$



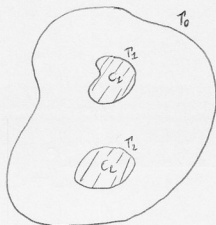
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (X \nabla U) = 0 & \forall t > 0, \forall x \in]0, L[\\ U(t, 0) = \cancel{u_0(t)} & \forall t > 0 \\ U(t, L) = \cancel{u_L(t)} & \forall t > 0 \\ U(0, x) = 100 & \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad \text{Conditions aux limites C.L.}$$

$$U_0(t) = \begin{cases} 100 - 90t & \forall t \in [0, 1] \\ 10 & \forall t \geq 1 \end{cases}$$

$$U_L(t) = \begin{cases} 100 - 80t & \forall t \in [0, 1] \\ 20 & \forall t \geq 1 \end{cases}$$

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{L}{3}] \\ 1/L & \text{si } x \in [\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}] \\ 2 & \text{si } x \in [\frac{2L}{3}, L] \end{cases}$$

b Conduction thermique dans une plaque homogène (même conductivité thermique



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (X \nabla u) = 0$$

~~$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (X \nabla u) = 0$$~~

$$\left. \begin{aligned} u(t, x, y) &= u_0(x, y) & \forall (x, y) \in T_0 \\ u(t, x, y) &= u_1(x, y) & \forall (x, y) \in T_1 \\ u(t, x, y) &= u_2(x, y) & \forall (x, y) \in T_2 \end{aligned} \right\} \text{C.L.}$$

$$u(0, x, y) = 20 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{C.I.}$$

$$u_0(t, x, y) = 20 \quad \forall (x, y) \in T_0 \quad \forall t > 0$$

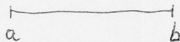
$$u_1(t, x, y) = \begin{cases} \cancel{20 + 40t} & \cancel{t \in [0, 1]} \\ 20 + 40t & t \in [0, 1] \\ 60 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$u_2(t, x, y) = \begin{cases} 20 + (300 - 20)t & \forall t \in [0, 1] \\ 300 & t \geq 1 \end{cases}$$

II] Méthode des différences finies pour (1D en espace)

(a) Pb modèle stationnaire :

$$(I) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]a, b[\\ u(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$$



* Développement de Taylor $h > 0$

$$(1) \quad u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_+) \quad \xi_+ \in]x, x+h[$$

$$(2) \quad u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_-) \quad \xi_- \in]x-h, x[$$

$$(1) + (2) : \quad u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + \frac{h^4}{4!} (u^{(4)}(\xi_+) + u^{(4)}(\xi_-))$$

$$u^{(2)}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_+) + u^{(4)}(\xi_-)) \quad (3)$$

ou a aussi

$$(3) \quad u^{(1)}(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \frac{h}{2} u^{(2)}(\xi) \quad \xi \in]x-h, x[\quad (4)$$

* On discrétise l'intervalle $[a, b]$

$$x_i = a + ih \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{N} \quad i \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]a, b[\\ u(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i) & \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \\ u(x_0) = \alpha \\ u'(x_N) = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3) \quad \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_+) + u^{(4)}(\xi_-)) = f(x_i) & \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \\ (4) \quad \frac{u(x_N) - u(x_{N-1}))}{h} + \frac{h}{2} u^{(2)}(\xi_N) = \beta \end{cases}$$

$\xi_+^i \in]x_i, x_{i+2}[$
 $\xi_-^i \in]x_{i-2}, x_i[$
 $\xi_N \in]x_{N-2}, x_N[$

On prend comme schéma

$$(5) \begin{cases} (a) \quad -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 f_i & \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \\ (b) \quad u_0 = \alpha \\ (c) \quad u_N - u_{N-1} = h\beta \end{cases}$$

ou $u_i = u(x_i)$

Les inconnues de (5) sont les $u_i \quad \forall i \in [0, N]$

Il y a $N+1$ inconnues et $N+1$ équations linéaires. On est ramené à résoudre le système

$$A \vec{U} = b$$

avec $\vec{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}) \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{h^2}{2} f_1 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ \beta \end{pmatrix}$$

ou encore $\mathcal{L}_h \vec{U}_h = b_h$ avec

$$\vec{U}_h = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

$$\mathcal{L}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1/h^2 & 1/h^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}) \quad b_h = \begin{pmatrix} \alpha \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ \beta \end{pmatrix}$$

On note \mathcal{E}_i l'erreur de consistance du schéma (S) aux points $x_i \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$

On a

$$(I') \begin{cases} -U''(x_i) = f(x_i) & \forall x_i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket & (I')(a) \\ U(x_0) = \alpha & & (I')(b) \\ U'(x_N) = \beta & & (I')(c) \end{cases}$$

et

$$(S') \begin{cases} -\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i & \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket & (S')(a) \\ U_0 = \alpha & & (S')(b) \\ \frac{U_N - U_{N-1}}{h} = \beta & & (S')(c) \end{cases}$$

Pour déterminer l'erreur de consistance du schéma discret (S') par rapport à (I') on remplace, dans le schéma discret U_i par $U(x_i)$ et on soustrait (S')(a) à (I')(a), (S')(b) à (I')(b) et (S')(c) à (I')(c) pour obtenir les erreurs de consistance aux points $x_i \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$(I'a) - (S'a) : \mathcal{E}_i = \left| -U''(x_i) - \left(-\frac{U(x_{i+1}) - 2U(x_i) + U(x_{i-1}))}{h^2} \right) \right|$$

$$(I'b) - (S'b) : \mathcal{E}_0 = |U(x_0) - U(x_0)| = 0$$

$$(I'c) - (S'c) : \mathcal{E}_N = \left| U'(x_N) - \frac{U(x_N) - U(x_{N-1}))}{h} \right|$$

Def [L'erreur (globale) de consistance est

$$\mathcal{E} = \max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{E}_i$$

Or

$$\mathcal{E}_i = C_1 h^2 \quad \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$$

$$\mathcal{E}_0 = 0$$

$$\mathcal{E}_N = D h$$

(approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde)

(approximation d'ordre 1 de la dérivée première)

Quand h est suffisamment petit

$$\mathcal{E} = O(h)$$

Def [On dit qu'un schéma est d'ordre p si l'erreur de consistance se comporte comme h^p i.e. $\mathcal{E} = O(h^p)$

$$\| \mathcal{E}_h \|_{\infty} = \max_{x \in [0, N]} | \mathcal{E}_{h,x} | \ll \max (Ch, Dh) \ll \epsilon' h$$

Ce schéma est d'ordre 1 ! ~~un~~

C'est la discrétisation de la condition aux limites $u'(L) = \beta$ qui était d'ordre 1 et qui ~~impose~~ impose cet ordre.

On peut améliorer en utilisant une discrétisation d'ordre 2 de cette C.L.

1^{ère} méthode

On a

$$(6) \quad u(x-2h) = u(x) - 2h u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} u^{(3)}(x_2) \quad x_2 \in]x-2h, x[$$

$$(7) \quad u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_2) \quad x_2 \in]x-h, x[$$

L'idée est de "tuer" par une combinaison linéaire entre (6) et (7) les termes en $u^{(3)}$.

On effectue ~~4x~~ $4 \times (7) - (6)$

$$4u(x-h) - u(x-2h) = 3u(x) - 2h u'(x) - \left[\frac{4h^3}{3!} u^{(3)}(x_2) - \frac{8h^3}{3!} u^{(3)}(x_1) \right]$$

On obtient

$$u'(x) = \frac{u(x-2h) - 4u(x-h) + 3u(x)}{2h} - \left[\frac{2h^2}{3!} u^{(3)}(x_1) - \frac{4h^2}{3!} u^{(3)}(x_2) \right]$$

On prend alors

$$u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N = 2h\beta \quad \text{au lieu de (5)-(6)}$$

Le schéma sera alors d'ordre 2

2^{ème} méthode

On a

$$u(x_{N-1}) = u(x_N) - h u'(x_N) + \frac{h^2}{2!} u''(x_N) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_2) \quad x_2 \in]x_{N-1}, x_N[$$

or $u''(x_N) = -f(x_N)$! ce qui donne

$$u'(x_N) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \frac{h}{2} (-f(x_N)) - \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x_2)$$

On prend alors

$$u_N - u_{N-1} = \frac{h^2}{2} f(x_N) + h\beta \quad \text{au lieu de (5)-(6)}$$

Le schéma sera alors d'ordre 2

II Méthode des différences finies 1D

(b) pb modèle non stationnaire

$$(IIb) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) \\ u(t, a) = u_a(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall t > 0 \quad \forall x \in]a, b[\\ \text{C.L.} \\ \text{C.I.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall t > 0 \\ \forall t > 0 \\ \forall x \in]a, b[\end{array}$$

On rappelle

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t+\Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + O(\Delta t^2)$$

$$(2) \quad u(t+\Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \dots$$

$$(3) \quad u(t, x+\Delta x) = u(t, x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \dots$$

On discrétise en temps et en espace

$$t^n = n \Delta t \quad \text{avec } \Delta t = \frac{L}{N_t} \quad \text{avec } n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$$

$$x_i = a + i \Delta x \quad \text{avec } \Delta x = \frac{b-a}{N_x} \quad \text{avec } i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$$

De (II-b) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = f(t^n, x_i) \\ u(t^n, x_0) = u_a(t^n) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_{N_x}) = v_b(t^n) \\ u(t^0, x_i) = u_0(x_i) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, N_x-1 \rrbracket \\ \forall n \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket \end{array}$$

On choisit les approximations

$$(1) \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) = \frac{u(t^n, x_i) - u(t^{n-1}, x_i)}{\Delta t} + O(\Delta t) + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^{n-1/2}, x_i) \quad \exists \theta^n \in]t^{n-1}, t^n[$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = \frac{u(t^n, x_{i-1}) - 2u(t^n, x_i) + u(t^n, x_{i+1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

On prend comme schéma

Le schéma d'Euler implicite

$$(10) \begin{cases} (a) \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} = f_i^n & \forall i \in \llbracket 1, N_x-1 \rrbracket \\ & \forall n \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \\ (b) U_0^n = U_a(t^n) & \forall n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket \\ (c) U_{N_x-2}^n - 4U_{N_x-1}^n + 3U_{N_x}^n = 2\Delta x f_{N_x}^n \\ (d) U_i^0 = U_0(x_i) & \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket \end{cases}$$



au condition de compatibilité :

~~(10-a)~~ (10-a) en $n=0$
et (10-b) en $i=0$

On choisissant

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t}(t^n, x_i) = \frac{U(t^{n+1}, x_i) - U(t^n, x_i)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On obtient un autre schéma : Le schéma d'Euler explicite

$$(11) \begin{cases} (a) \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} - \frac{U_{i-1}^n + 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} = f_i^n & \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket, \forall n \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \\ (b) U_0^n = U_a(t^n) \\ (c) U_{N_x-2}^n - 4U_{N_x-1}^n + 3U_{N_x}^n = 2\Delta x f_{N_x}^n \\ (d) U_i^0 = U_b(x_i) & \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket \end{cases}$$

Ces deux schémas sont d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Ecriture vectorielle des schemas (10) et (11) :

On pose
$$U^n = \begin{pmatrix} U_0^n \\ \vdots \\ U_{N_x}^n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} U(t^n, x_0) \\ \vdots \\ U(t^n, x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

$$(10-a) \Leftrightarrow (1+\alpha)U_i^n - \alpha U_{i-1}^n - \alpha U_{i+1}^n = \Delta t f_i^n + U_i^{n-1}$$

avec $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

* Le schéma (10) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} A U^n = b^{n-1} \\ U^0 \text{ donné} \end{cases} \quad \forall n \in [1, N_t]$$

avec $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$b^{n-1} = \begin{pmatrix} U_a(t^n) \\ \Delta t f_1^n \\ \vdots \\ \Delta t f_{N_x-1}^n \\ \Delta t f_{N_x}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U_1^{n-1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et
$$U^0 = \begin{pmatrix} U_0(x_0) \\ \vdots \\ U_0(x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

A chaque itération, on résout un système linéaire !

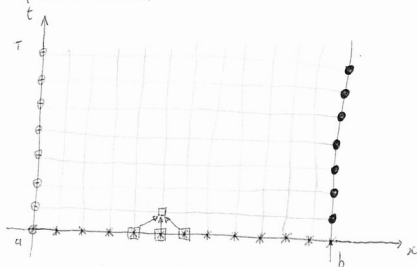
le schéma (17) s'écrit

$$(17) \begin{cases} (a) U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + \Delta t f_i^n & \forall i \in [1, N_x-1] \\ (b) U_0^{n+1} = U_a(t^{n+1}) & \forall n \in [0, N_t] \\ (c) U_{N_x}^{n+1} = \frac{1}{3} (2k_\lambda v_b(t^{n+1}) + 4U_{N_x-1}^{n+1} - U_{N_x-2}^{n+1}) & \forall n \in [0, N_t] \\ (d) U_i^0 = U_0(x_i) & \forall i \in [1, N_x-1] \end{cases}$$

C'est le schéma d'Euler explicite par l'équation de la chaleur

On connaît

$$U^0 = \begin{pmatrix} U_{a,0}^0 \\ U_{1,0}^0 \\ \vdots \\ U_{N_x-1,0}^0 \\ U_{N_x,0}^0 \end{pmatrix}$$



- x condition initiale
- o condition aux limites type Dirichlet
- condition aux limites type Neumann

Peut-on calculer U^1 ?

(1) Grâce à (a) (pour $i=0$), on peut calculer $U_i^1 \forall i \in [1, N_x]$ qui ne dépend que de U_{i-1}^0, U_i^0 et U_{i+1}^0

(2) U_0^1 est donné par (b)

(3) et $U_{N_x}^1$ est donné par (c) car on vient de calculer $U_{N_x-1}^1$ et $U_{N_x-2}^1$

Remarque l'étape (3) est nécessairement après l'étape (1).

Données du schéma (17)

Données du problème continu

$$\begin{cases} a, b \text{ deux réels } a < b \\ T \text{ réel } T > 0 \\ f: [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ U_a: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ v_b: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ U_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ N_x \text{ un entier } \geq 0 \\ N_t \text{ " " } \end{cases}$$

Résultat

$$U_i^n \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [0, N_x] \\ \forall n \in [0, N_t]$$

stocké dans une matrice (ou tableau) $(N_t+1) \times (N_x+1)$

$$U = \begin{pmatrix} U^0 & U^1 & \dots & U^{N_t} \end{pmatrix}$$

On espère $U_i^n \approx U(t^n, x_i)$
avec $t^n = \dots$ $x_i = \dots$

Algorithme

Fonction $[t, x, U] \leftarrow \text{EulerExChaleur}(a, b, T, F, U_0, v_h, U_0, N_x, N_t)$

% voir précédemment pour les données

% $t \in \mathbb{R}^{N_t+1}$ $t(n) = t^{n+1} \quad \forall n \in \llbracket 1, N_t+1 \rrbracket$

% $x \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ $x(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, N_x+1 \rrbracket$

% $U \in \mathbb{R}^{N_x+1, N_t+1}$ (R) avec $U(\cdot, 1) = U_{\cdot-1}^{n-1}$ $\forall i \in \llbracket 1, N_x+1 \rrbracket$
 $\forall n \in \llbracket 1, N_t+1 \rrbracket$

$\boxed{\text{R0}}$ (A) [Initialisation de $U(\cdot, 1) \leftarrow U_{\cdot-1}^0 \quad \forall i \in \llbracket 1, N_x+1 \rrbracket$ (ie $U(\cdot, 1) \leftarrow U_0(x)$)]

(B) $\left[\begin{array}{l} \text{pour } n \leftarrow 1 \text{ à } N_t \\ \quad \text{Calcul de } U(\cdot, n+1) \leftarrow U^n \\ \text{fin pour} \end{array} \right.$

$\boxed{\text{R1}}$

$hx \leftarrow (b-a)/N_x$

$ht \leftarrow T/N_t$

$x \leftarrow a : hx : b$

~~pour~~

~~pour~~

$t \leftarrow 0 : ht : T$

(A) $\left[\begin{array}{l} \text{pour } i \leftarrow 1 \text{ à } N_x+1 \\ \quad U(i, 1) \leftarrow U_0(x(i)) \\ \text{fin pour} \\ \alpha \leftarrow c/(x^2) \\ \beta \leftarrow 1-2\alpha \end{array} \right.$

(B) $\left[\begin{array}{l} \text{pour } n \leftarrow 1 \text{ à } N_t \\ \quad \text{pour } i \leftarrow 1 \text{ à } N_x-1 \\ \quad \quad U(i+1, n+1) \leftarrow \beta * U(i+1, n) + \alpha * (U(i, n) + U(i+2, n)) \\ \quad \quad \quad + hc * f(t(n), x(i+1)) \\ \quad \text{fin pour} \\ \quad U(1, n+1) \leftarrow U_0(t(n+1)) \\ \quad U(N_x+1, n+1) \leftarrow (2 * hx * v_b(t(n+1)) + 4U(N_x, n+1) - U(N_x-1, n+1)) / 3 \\ \text{fin pour} \end{array} \right.$

II) Méthode des différences finie 1D

(c) Etude de la stabilité au sens de Von Neuman

L'étude porte sur le schéma sans condition aux limites et sans second membre

Pour notre exemple de vant donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \varphi(t,x) & \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il n'y a donc pas "d'apport d'énergie" donc

$$\int_{\mathbb{R}} |u(\epsilon^{n+1}, x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(\epsilon^n, x)|^2 dx$$

Le schéma d'Euler implicite est donc

$$(20) \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Le schéma d'Euler explicite est donc

$$(21) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

On écrit les versions continues en espace des schémas (20) et (21) par obtenir respectivement

$$(22) \quad \frac{\mathcal{V}^n(x) - \mathcal{V}^{n-1}(x)}{\Delta t} - \frac{\mathcal{V}^n(x+\Delta x) - 2\mathcal{V}^n(x) + \mathcal{V}^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

et

$$(23) \quad \frac{\mathcal{V}^{n+1}(x) - \mathcal{V}^n(x)}{\Delta t} - \frac{\mathcal{V}^n(x+\Delta x) - 2\mathcal{V}^n(x) + \mathcal{V}^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

On note $\hat{\varphi}$ la transformée de Fourier de φ définie par

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx$$

On a alors

$$\hat{\hat{\varphi}} = 2\pi \varphi \quad \text{et} \quad \|\hat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_2 \quad \text{ou} \quad \|\varphi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx$$

Pour étudier la stabilité au sens de von Neuman de (22), on multiplie (22) par $e^{-i\lambda x}$ et on intègre sur $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} (22) dx :$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^{n-1}(x) dx \right)$$

$$- \frac{1}{\Delta x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n \left(\frac{x+\Delta x}{2} \right) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x) dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n \left(\frac{x-\Delta x}{2} \right) dx \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(\widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) - \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda) \right) - \frac{1}{\Delta x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda(y-\Delta x)} \mathcal{V}^n(y) dy - 2 \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda(y+\Delta x)} \mathcal{V}^n(y) dy \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(\widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) - \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda) \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{i\lambda\Delta x} \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) - 2 \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) + e^{-i\lambda\Delta x} \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e^{i\lambda\Delta x} - 2 + e^{-i\lambda\Delta x}) \right] = \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda)$$

$$\text{or } e^{i\lambda\Delta x} - 2 + e^{-i\lambda\Delta x} = \left(e^{i\lambda\frac{\Delta x}{2}} - e^{-i\lambda\frac{\Delta x}{2}} \right)^2 \\ = -4 \left(\frac{e^{i\lambda\frac{\Delta x}{2}} - e^{-i\lambda\frac{\Delta x}{2}}}{2i} \right)^2 = -4 \sin^2 \left(\lambda \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Donc

$$\widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \left[\underbrace{1 + 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\lambda \frac{\Delta x}{2} \right)}_{> 0} \right] = \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) = \frac{1}{1 + 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\lambda \frac{\Delta x}{2} \right)} \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda)$$

$$= a(\lambda) \widehat{\mathcal{V}}^{n-1}(\lambda) = (a(\lambda))^{n-1} \widehat{\mathcal{V}}^0(\lambda)$$

Ici $0 < a(\lambda) < 1$ donc le schéma est

inconditionnellement stable

car $\|\widehat{\mathcal{V}}^n\|_{\ell^2} \leq \|\widehat{\mathcal{V}}^0\|_{\ell^2}$ i.e. $\|\mathcal{V}^n\|_{\ell^2} \leq \|\mathcal{V}^0\|_{\ell^2}$

Pour le schéma (23)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} (23) dx =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^{n+1}(x) dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x) dx \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x+\Delta x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x) dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \mathcal{V}^n(x-\Delta x) dx \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \left(\widehat{\mathcal{V}}^{n+1}(\lambda) - \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(e^{i\lambda \Delta x} \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) - 2 \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) + e^{-i\lambda \Delta x} \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{V}}^{n+1}(\lambda) = \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda) \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(e^{i\lambda \Delta x} - 2 + e^{-i\lambda \Delta x} \right) \right)$$

$$= \left(1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) \right) \widehat{\mathcal{V}}^n(\lambda)$$

$a(\lambda)$

si $|a(\lambda)| < 1$ alors le schéma est stable

or

$$|a(\lambda)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < -4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) < 1$$

~~\Leftrightarrow~~

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq -4 \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 - 4 \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

pour avoir $|a(\lambda)| < 1$, il faut que $1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq -1$

$$\text{ie } -4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq -2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

Le schéma (23) est ~~est~~ conditionnellement stable !

II

Conditions aux limites sur domaine $[a, b]$

- condition de type Dirichlet

$$u(t, a) = u_a(t) \quad \text{en } a$$

$$\text{ou } u(t, b) = u_b(t) \quad \text{en } b$$

- condition de type Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = g_a(t) \quad \text{en } a$$

$$\text{ou } \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = g_b(t) \quad \text{en } b$$

- condition de type Robin ou Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) + \alpha_a(t) u(t, a) = g_a(t) \quad \text{en } a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) + \alpha_b(t) u(t, b) = g_b(t) \quad \text{en } b$$

II] Méthode des différences finies 1D

e) Lien avec les E.D.O.

NON FAIT

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) & \forall t > 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ U(t, a) = U_a(t) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(t, b) = \nu_b(t) \\ U(0, x) = U_0(x) \end{cases}$$

On discrétise uniquement en espace

$$x_i = a + i \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{b-a}{N_x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x_i) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x_i) = f(t, x_i) & \forall i \in \llbracket 1, M_x-1 \rrbracket \\ U(t, x_0) = U_a(t) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(t, x_{M_x}) = \nu_b(t) \\ U(0, x_i) = U_0(x_i) \end{cases}$$

on pose $U_i(t) = U(t, x_i)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x_i) - \frac{U(t, x_{i+1}) - 2U(t, x_i) + U(t, x_{i-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) = f(t, x_i) \\ U(t, x_0) = U_a(t) \\ \frac{U(t, x_{M_x-2}) - 4U(t, x_{M_x-1}) + 3U(t, x_{M_x})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) = \nu_b(t) \\ U(0, x_i) = U_0(x_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU_i(t)}{dt} - \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{\Delta x^2} = f_i(t) & \forall i \in \llbracket 1, M_x-1 \rrbracket \\ U_0(t) = U_a(t) \\ U_{M_x-2}(t) - 4U_{M_x-1}(t) + 3U_{M_x}(t) = 2\Delta x \nu_b(t) \\ U_i(0) = U_0(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, M_x \rrbracket \end{cases}$$

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = f_1(t) + \frac{U_2(t) - 2U_1(t) + U_0(t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = f_i(t) + \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{\Delta x^2} \quad \forall i \in \llbracket 1, N_x-2 \rrbracket$$

$$\frac{dU_{N_x-1}(t)}{dt} = f_{N_x-1}(t) + \frac{(U_{N_x}(t) - 2U_{N_x-1}(t) + U_{N_x-2}(t))}{\Delta x^2}$$

$$\text{avec } U_{N_x}(t) = \frac{1}{3} (2\Delta x v_f(t) + 4U_{N_x-1}(t) - U_{N_x-2}(t))$$

on pose

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_{N_x-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = F(t, U(t)) \\ U(0) = \begin{pmatrix} U_0(x_1) \\ \vdots \\ U_0(x_{N_x-1}) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{avec } F: \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}^{N_x-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_x-1}$$

$$(t, Z) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(t) + \frac{z_2 - 2z_1 + U_0(t)}{\Delta x^2} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N_x-1}(t) + \dots \end{pmatrix}$$