$\boxed{II}$

1) Equations des ondes

$$(E_1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) & \forall t\in]0,T] \quad \forall x\in]a,b[\\ u(0,x) = u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & \text{conditions initiales } \forall x\in]a,b[\\ u(t,a) = u_a(t) & \\ u(t,b) = u_b(t) & \text{conditions aux limites } \forall t\in]0,T] \end{cases}$$

Discrétisation

$x_i = a + i\Delta x \quad \forall i\in [\![0,N_x]\!] \quad$ avec $\Delta x = \dfrac{b-a}{N_x}$

$t^n = n\Delta t \quad \forall n\in [\![0,N_t]\!] \quad$ avec $\Delta t = T/N_t$

$(E_1) \Rightarrow$

$$(E_1^h)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n,x_i) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i) = f(t^n,x_i) & (a) \quad \forall n\in [\![1,N_t]\!] \quad \forall i\in [\![1,N_x-1]\!] \\ u(t^0,x_i) = u_0(x_i) & \forall i\in [\![0,N_x]\!] \quad (b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t^0,x_i) = v_0(x_i) & \text{"} \quad (c) \\ u(t^n,a) = u_a(t^n) & \forall n\in [\![1,N_t]\!] \quad (d) \\ u(t^n,b) = u_b(t^n) & \text{"} \quad (e) \end{cases}$$

On choisit les approximations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n,x_i) = \frac{u(t^{n+1},x_i) - 2u(t^n,x_i) + u(t^{n-1},x_i)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

(E_1^h)-(a) :
$$\frac{u(t^{n+1},x_i) - 2u(t^n,x_i) + u(t^{n-1},x_i)}{\Delta t^2} - \frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta x^2} = f(t^n,x_i) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

On prend comme schéma

$$(0) \quad \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = f(t^n,x_i) = f_i^n$$

c'est à dire

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + \Delta t^2 f_i^n \qquad \forall n\in [\![1,N_t]\!] \quad \forall i\in]\!]0,N_x[\![$$

Ce dernier schéma est un schéma à deux pas de temps : pour calculer U au temps t^{n+1} je dois connaître U aux temps t^n et t^{n-1}.

Il faut donc un autre schéma pour calculer U_i^1 $\forall i \in]\!]0, N_x[\![$

On connait U_i^0 $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$ par (E_1^h)-(b) :

$$(1) \quad U_i^0 = u_0(x_i), \ \forall i \in [\![0, N_x]\!]$$

On a

$$u(t^1, x_i) = u(t^0, x_i) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t^0, x_i) + O(\Delta t^2)$$

$$= u_0(x_i) + \Delta t \, v_0(x_i) + O(\Delta t^2) \quad \text{par } (E_1^h)\text{-(b) et } (E_1^h)\text{-(c)}$$

D'où

$$(2) \quad U_i^1 = U_i^0 + \Delta t \, v_0(x_i) \quad \text{(schéma à l'ordre 2 en temps)}$$

$$\forall i \in [\![0, N_x]\!]$$

On pose $\mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} U_0^n \\ \vdots \\ U_{N_x}^n \end{pmatrix}$

On connait donc $\mathcal{U}^0$ et $\mathcal{U}^1$ (resp. formule (1) et (2))

on utilise alors le schéma suivant pour calculer $\mathcal{U}^{n+1}$ $\forall n \in [\![1, N_t - 1]\!]$

$$\begin{cases} U_0^{n+1} = u_a(t^{n+1}) \\ U_i^{n+1} = 2U_i^n - U_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\right) + \Delta t^2 f_i^n \quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![\\ U_{N_x}^{n+1} = u_b(t^{n+1}) \end{cases}$$

Ce schéma peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \qquad \beta = 2(1-\alpha)$$

$$U^{n+1} = \mathbb{A}\, U^n + b^n$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^n = \begin{pmatrix} u_a(t^{n+1}) \\ -u_1^{n-1} + \Delta t^2 f_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ -u_{N_x-1}^{n-1} + \Delta t^2 f_{N_x-1}^n \\ u_b(t^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Etude de la stabilité au sens de Von Neumann

On écrit la version continue en espace du schéma (0) homogène sans second membre

$$(5) \qquad \frac{v^{n+1}(x) - 2v^n(x) + v^{n-1}(x)}{\Delta t^2} - \frac{v^n(x+\Delta x) - 2v^n(x) + v^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

On multiplie (5) par $e^{-i\xi x}$ et on intègre sur $\mathbb{R}$ en x

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^{n+1}(x)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^n(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^{n-1}(x)\,dx \right)$$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^n(x+\Delta x)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^n(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v^n(x-\Delta x)\,dx \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t^2}\left(\widehat{v}^{n+1}(\xi) - 2\widehat{v}^n(\xi) + \widehat{v}^{n-1}(\xi) \right) - \frac{1}{\Delta x^2}\Big(\underbrace{e^{-i\xi\Delta x}\widehat{v}^n(\xi) - 2\widehat{v}^n(\xi) + e^{i\xi\Delta x}\widehat{v}^n(\xi)}_{-4\sin^2\left(\xi\frac{\Delta x}{2}\right)\widehat{v}^n(\xi)} \Big) = 0$$

On pose $X^{n+1} = \begin{pmatrix} v^{n+1} \\ v^n \end{pmatrix}$ $\qquad \widehat{X}^{n+1} = \begin{pmatrix} \widehat{X}^{n+1} \\ \widehat{v}^n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{\Delta t^2}} \; \widehat{v}^{n+1}(\xi) = \overbrace{\left(2 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} 4\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right)}^{a(\xi)} \widehat{v}^n(\xi) - \widehat{v}^{n-1}(\xi)$$

$$\widehat{X}^{n+1}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{v}^{n+1}(\xi) \\ \widehat{v}^n(\xi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(\xi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}(\xi)} \begin{pmatrix} \widehat{v}^n(\xi) \\ \widehat{v}^{n-1}(\xi) \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{n+1}(\xi)\,\widehat{X}^0(\xi)$$

Il faut que $\rho(\mathbb{A}(\xi)) \leq 1$

les valeurs propres de $\mathbb{A}(\xi)$ sont racines de

$$-\lambda(a(\xi) - \lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda a(\xi) + 1 = 0 \qquad (6)$$

Or ~~ded~~ le produit des racines est égale à 1 ($\det(\mathbb{A}(\xi))$)

Si jamais ~~l'une d'elle est~~ ~~ps~~ elles sont réelles, l'une sera nécessairement de valeur absolue > 1 donc condition de Von Neumann non satisfaite.

Il faut donc que le discriminant de (6) soit négatif (ou nul)

$$(a(\xi))^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow |a(\xi)| \leq 2 \quad \forall \xi$$

$$|a(3)| \leqslant 2 \iff \left| 2 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 4 \sin^2\left(3\frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant 2$$

$$\iff -2 \leqslant 2 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(3\frac{\Delta x}{2}\right) \leqslant 2$$

$$\iff -4 \leqslant -4\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \leqslant 0$$

$$\iff 0 \leqslant 4\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \leqslant 4$$

$$\iff 0 \leqslant \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \leqslant 1$$

$$\iff \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leqslant 1$$

$$\iff \underline{\Delta t \leqslant \Delta x}$$

Equations des ondes

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \quad \forall t \in]0,T],\ \forall x \in]a,b[\\ (2) & u(0,x) = g_0(x) \quad \forall x \in [\![a,b]\!] \\ (3) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \quad \forall x \in [\![a,b]\!] \\ (4) & u(t,a) = u_a(t) \quad \forall t \in]0,T] \\ (5) & u(t,b) = u_b(t) \quad \forall t \in]0,T] \end{cases}$$

- On cherche
$$u : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$(t,x) \mapsto u(t,x)$$
- Données
$T > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $a < b$
$f :]0,T[\times]a,b[\to \mathbb{R}$
$g_0 : [\![a,b]\!] \to \mathbb{R}$
$v_0 : [\![a,b]\!] \to \mathbb{R}$
$u_a :]0,T] \to \mathbb{R}$
$u_b :]0,T] \to \mathbb{R}$

Liens avec les E.D.O.

On note $x_i = a + i h_x \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!]$ avec $h_x = \dfrac{b-a}{N_x}$

Le pb (1) à (5) entraine

$$\begin{cases} (1)' & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x_i) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x_i) = f(t,x_i) \quad \forall i \in]\!]0,N_x[\![\quad \forall t \in]0,T] \\ (2)' & u(0,x_i) = g_0(x_i) \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!] \\ (3)' & \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x_i) = v_0(x_i) \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!] \\ (4)' & u(t,x_0) = u_a(t) \quad \forall t \in]0,T] \\ (5)' & u(t,x_{N_x}) = u_b(t) \quad \forall t \in]0,T] \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x_i) = \frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

$$(1)' \Leftrightarrow (1)'' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x_i) - \frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{h_x^2} + O(h_x^2) = f(t,x_i) \quad \forall i \in]\!]0,N_x[\![\quad \forall t \in]0,T]$$

On pose $u_i(t) \approx u(t,x_i) \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!]$ vérifiant

$$\begin{cases} (1)_i & \dfrac{d^2 u_i}{dt^2}(t) - \dfrac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h_x^2} = f_i(t) \quad \forall i \in]\!]0,N_x[\![\quad \forall t \in]0,T] \\ (2)_i & u_i(0) = g_0(x_i) \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!] \\ (3)_i & \dfrac{du_i}{dt}(0) = v_0(x_i) \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!] \\ (4)_i & u_0(t) = u_a(t) \\ (5)_i & u_{N_x}(t) = u_b(t) \end{cases}$$

On va écrire ces équations sous la forme d'un système d'équations linéaires différentielles du 2^{eme} ordre.

Pour celà, on élimine les termes en $u_0(t)$ et $u_{N_x}(t)$ dans $(1)_i$ en utilisant $(4)_i$ et $(5)_i$:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}(t) - \frac{u_2(t) - 2u_1(t) + \overset{\overset{u_a(t)}{\shortparallel}}{u_0(t)}}{h_x^2} = f_i(t) \qquad i=1$$

$$\frac{d^2u_i}{\partial t^2}(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h_x^2} = f_i(t) \qquad \forall i \in \rrbracket 1, N_x-1 \llbracket$$

$$\frac{d^2u_{N_x-1}}{dt^2}(t) - \frac{\overset{\overset{u_b(t)}{\shortparallel}}{u_{N_x}(t)} - 2u_{N_x-1}(t) + u_{N_x-2}(t)}{h_x^2} = f_{N_x-1}(t) \qquad i=N_x-1$$

Ce qui donne : On cherche $u_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\forall i \in \rrbracket 0, N_x \llbracket$ vérifiant

$$(I)\begin{cases} (a) & \dfrac{d^2u_1}{dt^2}(t) - \dfrac{u_2(t) - 2u_1(t)}{h_x^2} = f_i(t) + \dfrac{u_0(t)}{h_x^2} \\ (b) & \dfrac{d^2u_i}{dt^2}(t) - \dfrac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h_x^2} = f_i(t) \qquad \forall i \in \rrbracket 1, N_x-1 \llbracket \\ (c) & \dfrac{d^2u_{N_x-1}}{dt^2}(t) - \dfrac{-2u_{N_x-1}(t) + u_{N_x-2}(t)}{h_x^2} = f_{N_x-1}(t) + \dfrac{u_b(t)}{h_x^2} \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(II)\begin{cases} (a) & u_i(0) = g_0(x_i) \qquad \forall i \in \rrbracket 0, N_x \llbracket \\ (b) & \dfrac{du_i}{dt}(0) = v_0(x_i) \qquad \forall i \in \rrbracket 0, N_x \llbracket \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}(t) &= \mathbb{M}\vec{U}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{U}(0) &= \cancel{dn}\ \vec{U}_0 \in \mathbb{R}^{N_x-1} \\ \frac{d\vec{U}}{dt}(0) &= \vec{V}_0 \in \mathbb{R}^{N_x-1} \end{aligned}}$$

Pour l'écrire sous forme matricielle, on pose

$$\vec{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_{N_x-1}(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{U} : [0,T] \to \mathbb{R}^{N_x-1}$$

$\alpha = 1/h_x^2$

alors

$$\frac{d^2\vec{U}}{dt^2}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2U_1}{dt^2}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^2U_{N_x-1}}{dt^2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(U_2(t) - 2U_1(t)) \\ \alpha(U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)) \\ \vdots \\ \alpha(U_{N_x-1}(t) - 2U_{N_x-2}(t) + U_{N_x-3}(t)) \\ \alpha(-2U_{N_x-1}(t) + U_{N_x-2}(t)) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} g_1(t) + U_a(t)\times\alpha \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{N_x-2}(t) \\ g_{N_x-1}(t) + U_b(t)\times\alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}(t)}$$

~~On~~ pos

$$= \mathbb{M}\vec{U}(t) + \vec{b}(t)$$

$$\text{avec} \quad \mathbb{M} = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales sont

$$\vec{U}(0) = \begin{pmatrix} g_0(x_1) \\ \vdots \\ g_0(x_{N_x-1}) \end{pmatrix} = \vec{U}_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{U}}{dt}(0) = \begin{pmatrix} v_0(x_1) \\ \vdots \\ v_0(x_{N_x-1}) \end{pmatrix} = \vec{V}_0$$

On pose $d = N_x - 1$ alors On cherche $\vec{U} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tq

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}(t) = \mathbb{M}\vec{U}(t) + \vec{b}(t) & \forall t \in [0,T] \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \in \mathbb{R}^d \\ \frac{d\vec{U}}{dt}(0) = \vec{V}_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Pour écrire (III) sous la forme d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t,\vec{y}(t)) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

on pose

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \vec{v}(t) \\ \hline \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d} \qquad \text{par convention } \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \\ \hline y_{d+1}(t) \\ \vdots \\ y_{2d}(t) \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \\ \hline \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{d+1}(t) \\ \vdots \\ y_{2d}(t) \\ \hline \mathbb{M}\vec{v}(t) + \vec{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{d+1}(t) \\ \vdots \\ y_{2d}(t) \\ \hline \mathbb{M}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \vec{b}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{M} & 0 \end{array}\right)}_{\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \\ \hline y_{d+1}(t) \\ \vdots \\ y_{2d}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \vec{b}(t) \end{pmatrix}}_{\vec{B}(t) \in \mathbb{R}^{2d}}$$

On a donc

$$\vec{y}'(t) = \mathbb{A}\vec{y}(t) + \vec{B}(t)$$

Le problème de Cauchy est
Trouver $\vec{y} : [0,T] \to \mathbb{R}^{2d}$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dt}(t) = \cancel{\mathbb{A}\vec{y}(t) + \vec{B}(t)} \quad \forall t \in [0,T] \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \hline \vec{V}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d} \end{cases}$$

$$\vec{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$$
$$(t, \vec{y}) \mapsto \mathbb{A}\vec{y} + \vec{B}(t)$$