E.D.O. : méthodes numériques (cours 3)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

13 janvier 2015

Plan

Méthodes à un pas ou à pas séparés

Problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}'(t) & = & \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) & = & \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

Pour la méthode d'Euler progressive :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}).$$

Plan

Convergence

La méthode converge sur l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ si, pour la suite des $\boldsymbol{y}^{[n]}$ calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas h diminue :

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_{n\in\{0,\ldots,N\}} \left\| \boldsymbol{y}^{[n]} - \boldsymbol{y}(t^n) \right\| = 0$$

Plan

Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur $\boldsymbol{y}^{[0]}$ ou $\boldsymbol{\Phi}$ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas h.

Théorème

Si $\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h)$ vérifie la condition de Lipschitz en $\boldsymbol{y}$ alors la méthode est stable.

Plan

Consistance

- Le schéma de calcul (1) est consistant avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_{n} \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

  Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Consistance

- Le schéma de calcul (1) est consistant avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_{n} \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

  Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Théorème

Le schéma est consistant si $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.

-

Consistance

- Le schéma de calcul (1) est consistant avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_{n} \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

  Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Théorème

Le schéma est consistant si $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.

-

Théorème

Si la méthode est stable et consistante, alors elle converge pour n'importe quelle valeur initiale.

-

Plan

Ordre

La méthode itérative est d'ordre p si pour toute solution :

$$\max_n \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\| \leqslant Ch^p$$

Plan

Principe méthode de Runge-Kutta

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))$$

sur $[t^n, t^{n+1}]$ et de calculer :

$$\boldsymbol{y}(t^{n+1}) = \boldsymbol{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à q points intermédiaires $t^{n,i+1} = t^n + h_i$ pour calculer l'intégrale.

Principe méthode de Runge-Kutta

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h)$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

Sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \qquad (2)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$

Principe méthode de Runge-Kutta

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}.$$

Principe méthode de Runge-Kutta

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si
$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si
$$\sum_{i=1}^{q} c_i = 1.$$

Principe méthode de Runge-Kutta

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si
$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si
$$\sum_{i=1}^{q} c_i = 1.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si
$$\sum_{i=1}^{q} c_i a_i = 1/2.$$

Principe méthode de Runge-Kutta

- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si
$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si
$$\sum_{i=1}^{q} c_i = 1.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si
$$\sum_{i=1}^{q} c_i a_i = 1/2.$$
- Une méthode de Runge-Kutta est explicite si
$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!],\ j \geqslant i, \quad b_{ij} = 0.$$
- Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si f est contractante en y.

Plan

Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

- tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = (1-\alpha)\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) + \alpha \boldsymbol{f}(t + \frac{h}{2\alpha}, \boldsymbol{y} + \frac{h}{2\alpha}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}))$$

Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

- tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = (1-\alpha)\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) + \alpha \boldsymbol{f}(t + \frac{h}{2\alpha}, \boldsymbol{y} + \frac{h}{2\alpha}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}))$$

- Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient la **méthode de Heun** :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

- Avec $\alpha = 1$, on obtient la **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu** :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

Exercice

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

- Ecrire la fonction algorithmique `REDHeun` permettant de résoudre un problème de Cauchy **scalaire** par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\boldsymbol{f}$.

Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

Exercice

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

- Ecrire la fonction algorithmique `REDHeun` permettant de résoudre un problème de Cauchy **scalaire** par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\boldsymbol{f}$.
- Ecrire la fonction algorithmique `REDHeunVec` permettant de résoudre un problème de Cauchy **vectoriel** par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\boldsymbol{f}$.

Plan

Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Butcher suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \tag{4}$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\ \hline \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}). \end{array} \tag{5}$$