E.D.O. : méthodes numériques (cours 4)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

20 janvier 2015

Plan

Problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}'(t) & = & \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) & = & \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale :

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \boldsymbol{f}(t^{n+i}, \boldsymbol{y}^{[n+i]}) \tag{1}$$

où k est le nombre de pas, $\alpha_k \neq 0$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ et $\boldsymbol{y}^{[n+i]}$ connus $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$.

Remarque

Si $\beta_k = 0$ le schéma est explicite, sinon il est implicite.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \boldsymbol{f}(t^{n+i}, \boldsymbol{y}^{[n+i]})$$

Définition (ordre)

Soit y la solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ et $\boldsymbol{y}^{[n+k]}$ la valeur obtenue par le schéma (1) en prenant $\boldsymbol{y}^{[n+i]} = \boldsymbol{y}(t^{n+i})$, $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$. Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \boldsymbol{y}(t^{n+k}) - \boldsymbol{y}^{[n+k]}.$$

*Le schéma (1) est d'**ordre** p si*

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^p).$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \boldsymbol{f}(t^{n+i}, \boldsymbol{y}^{[n+i]})$$

Théorème

Un schéma à pas multiple de type (1) est d'ordre p si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in [\![1, p]\!]. \end{aligned}$$

Plan

- schéma du **point milieu** :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \;\; n \geqslant 1, \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- schéma du **point milieu** :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \ \ n \geqslant 1, \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array}\right.$$

- schéma à 2 pas.

- schéma du **point milieu** :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \;\; n \geqslant 1, \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

- schéma à 2 pas.
- Schéma d'ordre 2.

- schéma du **point milieu** :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \quad n \geqslant 1, \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- schéma à 2 pas.
- Schéma d'ordre 2.
- Comment calculer $\boldsymbol{y}^{[1]}$?

- schéma du **point milieu** :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \;\; n \geqslant 1, \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array}\right.$$

- schéma à 2 pas.
- Schéma d'ordre 2.
- Comment calculer $\boldsymbol{y}^{[1]}$?
  $\Rightarrow$ avec un schéma à un pas de même ordre (ou d'ordre supérieur)

Plan

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 1$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné}. \end{cases}$$

- $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné}. \end{cases}$$

Méthodes d'Adams-Bashforth

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- $n \geqslant 3$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- $n \geqslant 3$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

Ces schémas sont **explicites** et leur ordre correspond à leur nombre de pas, respectivement 2, 3 et 4.

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

Exercice

Ecrire la fonction algorithmique `AB2` associée au schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right)$$

pour la résolution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}'(t) & = & \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) & = & \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

Plan

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 0$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

- $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{cases}$$

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 0$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

- $n \geqslant 1$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

- $n \geqslant 2$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

- $n \geqslant 0$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

- $n \geqslant 1$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

- $n \geqslant 2$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & = & \text{donné.} \end{array} \right.$$

Ces schémas sont **implicites** et leur ordre correspond à leur nombre de pas plus 1, respectivement 2, 3 et 4.

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

Exercice

Ecrire la fonction algorithmique `AM2` associée au schéma d'Adams-Moulton d'ordre 2

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right)$$

pour la résolution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) & = & \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) & = & \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

On pourra utiliser la fonction `PointFixe` de paramètres ϕ, x_0 (position initiale), `tol` (tolérance), `nmax` (nombre maximum d'itération) retournant une approximation du point x tel que $\phi(x) = x$ par une méthode de point fixe.

Plan

Un schéma de type **prédicteur-correcteur** consiste à combiner un schéma **explicite** (prédicteur) avec un schéma **implicite** (correcteur) pour obtenit un nouveau schéma explicite.

Un schéma de type **prédicteur-correcteur** consiste à combiner un schéma **explicite** (prédicteur) avec un schéma **implicite** (correcteur) pour obtenit un nouveau schéma explicite.

Exemple 1 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Euler implicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]})$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

Un schéma de type **prédicteur-correcteur** consiste à combiner un schéma **explicite** (prédicteur) avec un schéma **implicite** (correcteur) pour obtenit un nouveau schéma explicite.

Exemple 1 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Euler implicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]})$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- **Prédiction :** $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

Un schéma de type **prédicteur-correcteur** consiste à combiner un schéma **explicite** (prédicteur) avec un schéma **implicite** (correcteur) pour obtenit un nouveau schéma explicite.

Exemple 1 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Euler implicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]})$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- **Prédiction :** $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Correction :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]})$

Un schéma de type **prédicteur-correcteur** consiste à combiner un schéma **explicite** (prédicteur) avec un schéma **implicite** (correcteur) pour obtenit un nouveau schéma explicite.

Exemple 1 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Euler implicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]})$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- **Prédiction :** $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Correction :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]})$

On obtient alors le schéma :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})).$$

Exemple 2 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Trapèze implicite :**
  $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}))$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

Exemple 2 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Trapèze implicite :**
  $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}))$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- **Prédiction :** $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

Exemple 2 :

- Euler explicite : $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- Trapèze implicite :
  $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}))$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- Prédiction : $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- Correction : $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}))$

Exemple 2 :

- **Euler explicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Trapèze implicite :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}))$

Schéma prédicteur-correcteur associé :

- **Prédiction :** $\tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
- **Correction :** $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}))$

On obtient ici un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2

On note $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$

Exercice

Ecrire la fonction algorithmique `ABAM3` associée au schéma prédicteur-correcteur d'Adams-Bashford et d'Adams-Moulton d'ordre 3 :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right) \tag{3}$$