

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.O. 2

EXERCICE 1

- Q. 1** 1. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy vectoriel.
 2. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy vectoriel?
 3. Que cherche-t'on? ■

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$y^{(3)}(t) - ty^{(2)}(t) - \cos(t)y^{(1)}(t) + \sin(t) = 0, t \in]t_0, t_0 + T], \quad (1.1)$$

$$y(t_0) = 0, \quad (1.2)$$

$$y^{(1)}(t_0) = 1, \quad (1.3)$$

$$y^{(2)}(t_0) = -1. \quad (1.4)$$

avec $t_0 = 0$ et $T = 4\pi$. Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n -ième de la fonction y en t .

- Q. 2** 1. Que signifie l'abréviation E.D.O.?
 2. Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. précédente. ■
- Q. 3** Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ (4 fois continuellement dérivable sur \mathbb{R}).
 1. Rappeler les développements de Taylor de $y(t+h)$ et $y(t-h)$.
 2. En déduire trois approximations de $y'(t)$, deux à l'ordre 1 et une à l'ordre 2.
 3. Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy. ■

EXERCICE 2

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (2.1)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (2.2)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$.

Schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 : le tableau de Butcher associé s'écrit

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 2 & 0 \\
 \hline
 & 1/6 & 2/3 & 1/6
 \end{array} \tag{2.3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (2.3).* ■

Q. 2 (algorithmique) *Soit $a, b, a < b$ deux réels. Ecrire une fonction DISREG retournant les points $t^n, t^0 = a < t^1 < \dots < t^N = b$, points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant).* ■

Q. 3 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique REDRK3 permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire $m = 1$) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.* ■

Q. 4 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab REDRK3 permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire $m = 1$) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.* ■

On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 3** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left(23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]} \right) \tag{2.4}$$

Q. 5 1. *Expliquer de manière détaillée l'utilisation de ce schéma pour la résolution d'un problème de Cauchy.*

2. *Ecrire la fonction algorithmique REDAB3 permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire $m = 1$) par le schéma (2.4).* ■

Q. 6 (Matlab) *On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que*

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \tag{2.5}$$

$$y(0) = 0. \tag{2.6}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

1. *Ecrire un programme Matlab permettant de comparer graphiquement une solution numérique calculée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 à la solution exacte.*

2. *Ecrire un programme Matlab permettant de retrouver graphiquement l'ordre de la méthode calculé numériquement.* ■