Travaux dirigés - E.D.P. 1

Exercice 1

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[, & (1.1)\\ u'(a) &= \alpha, & (1.2)\\ u(b) &= \beta. & (1.3)\end{aligned}$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données du problème* (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. Quelles sont les inconnues du problème (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type)*

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites? ∎

Q. 2 *Construire une discrétisation de* $[a;b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.* ∎

On note x_i, $i \in [\![0,N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1.1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \qquad (1.4)$$

Q. 3 *1. Expliquer comment le schéma* (1.4) *a été obtenu à partir de* (1.1) *et préciser ce que représente les termes* u_i, f_i, c_i *et* Δx*?*

2. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ *des valeurs que peuvent prendre i dans le schéma* (1.1).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ∎

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{b} \qquad (1.5)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}$ *(préciser les dimensions).* ∎

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1.1) *à* (1.3) *basé sur (1.5). (Utiliser au maximum les fonctions)* ∎

On note $\boldsymbol{W}$ le vecteur de dimension N, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N]\!]$.

Q. 6 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{W}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{M}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{d} \qquad (1.6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{M}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{W}$ *(préciser les dimensions).* ∎

Q. 7 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1.1) *à* (1.3) *basé sur (1.6). (Utiliser au maximum les fonctions)* ∎

Exercice 2

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T]\times]a;b[, & (2.1)\\ u(t_0,x) &= u_0(x),\ \forall x \in [a;b], & (2.2)\\ u(t,a) &= u_a(t),\ \forall t \in [t_0; t_0+T], & (2.3)\\ u(t,b) &= u_b(t),\ \forall t \in [t_0; t_0+T]. & (2.4)\end{aligned}$$

avec ν un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 *1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

2. L'E.D.P. (2.1) est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique? Justifier.

3. Quelles sont les données du problème (2.1) *à* (2.4)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

4. Quelles sont les inconnues du problème (2.1) *à* (2.4)*? (préciser le type)*

5. Quelles sont les conditions initiales?

6. Quelles sont les conditions aux limites? ∎

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0 + T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i.* ∎

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \tag{2.5}$$

Q. 3 *1. A quoi correspondent les valeurs u_i^{n+1}, f_i^{n+1}, Δt et Δx?*

2. Expliquer comment le schéma (2.5) *a été obtenu à partir de* (2.1).

3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (2.1) *à* (2.4)

4. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace? ∎

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 *1. Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*

2. En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ déjà calculé, montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}^{n+1}$ est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{b}^n \tag{2.6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}^n$ (préciser les dimensions). ∎

Q. 5 *1. Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

où α et β sont des réels donnés.

2. On suppose les données du problème (2.1) *à* (2.4) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ déjà implémentée : $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$.*

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.1) *à* (2.4) *en utilisant le schéma* (2.5). ∎