Examen du 10 Avril 2013

Exercice 1

Q1 1) a, b 2 réels $a<b$
α, β, ν, 3 réels
$f :]a,b[\to \mathbb{R}$

2) $u : [a,b] \to \mathbb{R}$

3) aucune

4) (2) et (3)

Q2 1) c'est l'ensemble des points $x_i = a + i h$ $\forall i \in [\![0,N]\!]$ et $h = \dfrac{b-a}{N}$

2) Données : a, b 2 réels $a<b$
$N \in \mathbb{N}^*$

Résultat : $X \in \mathbb{R}^{N+1}$ tq $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,N+1]\!]$

(version algo)
```
Fonction X ← DisReg(a, b, N)
  h ← (b-a)/N
  pour i ← 1 a N+1
    X(i) = a + (i-1)*h
  Fin
```

ou

(version Matlab)
```
Function X = DisReg(a,b,N)
  h = (b-a)/N;
  for i = 1:N+1
    X(i) = a + (i-1)*h;
  end
```

ou

(version Matlab vectorielle)
```
function X = DisReg(a,b,N)
  X = a:(b-a)/N:b;
```

Q3 1) D'après (1) on a

$$-u''(x) + \nu u'(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[\quad \text{(infinité d'équations)}$$

Ce qui entraine

$$-u''(x_i) + \nu u'(x_i) + u(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0,N[\![\quad \text{(N-1 équations)} \quad (E)$$

On sait que si $v \in \mathcal{C}^3$

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

on peut retrouver cette formule à partir des développements de Taylor de $v(x+h)$ et $v(x-h)$

On en déduit donc

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \quad (A)$$

Comme la formule (A) donne $u''(x_i)$ ~~en fcts des~~ à l'ordre 2, on cherche à exprimer $u'(x_i)$ à l'ordre 2 aussi pour conserver un schéma globale d'ordre 2. D'après les formule de Taylor on a

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + O(h^3) \qquad (B)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + O(h^3) \qquad (C)$$

En effectuant (B)-(C) on obtient

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2h\,u'(x_i) + O(h^3)$$

d'où

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \qquad (D)$$

L'équation (E) peut s'écrire de manière équivalente

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) + \nu\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) + u(x_i) = f(x_i) \qquad (G)$$

$$\forall i \in]\!]0, N[\![$$

En "oubliant" les termes en $O(h^2)$ et en notant $u_i \sim u(x_i)$ on obtient

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \nu\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = f_i \quad \forall i \in]\!]0, N[\![$$

avec $f_i = f(x_i)$, $\Delta x = h$ (et $c = 1$)

2) $\mathcal{E} =]\!]0, N[\![$

3) (3) s'écrit $u(x_N) = \beta$ i.e $u_N = \beta$ (formule exacte)

(1) s'écrit $u'(x_0) = \alpha$. On va donc chercher une formule d'ordre 2 pour exprimer $u'(x_0)$ en fonction des $u(x_i)$.

D'après les formules de Taylor on a

$$u(x_1) = u(x_0) + h\,u'(x_0) + \frac{h^2}{2!}u''(x_0) + O(h^3) \qquad (x_1 = x_0 + h) \qquad (H)$$

et

$$u(x_2) = u(x_0) + 2h\,u'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x_0) + O(h^3) \qquad (x_2 = x_0 + 2h) \qquad (I)$$

En effectuant 4(H) - (I) (pour "tuer" les termes en h^2) on a

$$4u(x_1) - u(x_2) = 3u(x_0) + 2h\,u'(x_0) + O(h^3)$$

On obtient alors

$$u'(x_0) = -\frac{3u(x_0) - 4u(x_1) + u(x_2)}{2h} + O(h^2)$$

L'équation au limite $u'(x_0) = \alpha$ peut s'écrire de manière équivalente

$$-\frac{3u(x_0) - 4u(x_1) + u(x_2)}{2h} + O(h^2) = \alpha$$

En "oubliant" le terme en $O(h^2)$, on obtient

$$-\frac{3u_0 - 4u_1 + u_2}{2h} = \alpha \qquad (J)$$

4) le schéma global s'écrit

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \nu\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = f_i \quad \forall i \in]0,N[\qquad (K)$$

$$-\frac{3u_0 - 4u_1 + u_2}{2h} = \alpha \qquad (J)$$

$$u_N = \beta \qquad (L)$$

Il est d'ordre 2 car toutes les dérivées ont été approchées par des formules d'ordre 2.

Q4 Les équations (K), (J), (L) sont linéaires en les $(u_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$.
Il y a N+1 équations, c'est donc un système linéaire à N+1 inconnues et N+1 équations. Il s'écrit donc sous la forme
$\mathbb{A}V = F$ où $V = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$

Pour simplifier on réécrit (K)

$$-(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{\nu h}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) + h^2 u_i = h^2 f_i \quad \forall i \in]0,N[$$

ou encore

$$\left(\frac{\nu h}{2} - 1\right)u_{i+1} + (2+h^2)u_i - \left(\frac{\nu h}{2} + 1\right)u_{i-1} = h^2 f_i, \quad \forall i \in]0,N[\qquad (M)_i$$

et (J) devient

$$3u_0 - 4u_1 + u_2 = -2h\alpha \qquad (N)$$

On pose $\mu_3 = \frac{\nu h}{2} - 1$, $\mu_2 = 2+h^2$ et $\mu_1 = -\left(\frac{\nu h}{2} + 1\right)$

$$
\begin{array}{r}
(N) \rightarrow \\
(M)_1 \rightarrow \\
(M)_2 \rightarrow \\
\vdots \\
(M)_i \rightarrow \\
\\
(M)_{N-1} \rightarrow \\
(L) \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
3 & -4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
U_0 \\ U_1 \\ \\ \\ U_i \\ \\ U_{N-1} \\ U_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-2h\alpha \\ h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_i \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ \beta
\end{pmatrix}
$$

Q5

<u>Données</u> d entier (dimension de la matrice)

$\alpha \in \mathbb{R}^3 \quad \alpha(i) = \alpha_i \quad \forall i \in [\![1,3]\!]$

$\beta \in \mathbb{R}^3 \quad \beta(i) = \beta_i \quad \forall i \in [\![1,3]\!]$

$\mu \in \mathbb{R}^3 \quad \mu(i) = \mu_i \quad \forall i \in [\![1,3]\!]$

<u>Résultat</u> $\mathbb{M}$ matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par (6)

Fonction $\mathbb{M} \leftarrow \text{AssembleMat}(d, \alpha, \mu, \beta)$

- $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{O}_{d \times d}$ (matrice nulle)
- $\mathbb{M}(1,1) \leftarrow \alpha(1)$, $\mathbb{M}(1,2) \leftarrow \alpha(2)$, $\mathbb{M}(1,3) \leftarrow \alpha(3)$
- pour $i \leftarrow 2$ à $d-1$
  - $\mathbb{M}(i,i-1) \leftarrow \mu(1)$, $\mathbb{M}(i,i) \leftarrow \mu(2)$, $\mathbb{M}(i,i+1) \leftarrow \mu(3)$
- Fin
- $\mathbb{M}(d,d-2) \leftarrow \beta(1)$, $\mathbb{M}(d,d-1) \leftarrow \beta(2)$, $\mathbb{M}(d,d) \leftarrow \beta(3)$

Q6

```
a, b, α, β, ν, f donnés
N ← 100,  h ← (b-a)/N
X ← DisReg(a,b,N)
μ ← [-(ν*h/2+1) ; 2+h*h ; (ν*h)/2-1]
F ← f(X)
b ← [-2*h*α ; F(2:N-1) ; β]        % calcul du second membre
A ← AssembleMat([3,-4,1] , μ , [0,0,1])
V ← RSL(A, b)
```

Exercice 2

Q1 1) Equations aux Dérivées Partielles

2) De manière générique $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\dfrac{\partial u}{\partial x} + e\dfrac{\partial u}{\partial y} + fu = g$

En posant $y = t$ et en identifiant avec (1) on obtient

$a = -\nu < 0$, $b = c = d = f = 0$ $e = 1$

et on a $\Delta = 0$.

Cette E.D.P est parabolique.

3) $\nu \in \mathbb{R}$ $\nu > 0$

$t_0 \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}$ $T > 0$

a, b 2 réels $a < b$

$u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$

$u_a : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$

$u_b : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$

$f :]t_0, t_0+T] \times]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

4) $u : [t_0, t_0+T] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

5) (2)

6) (3) et (4)

Q2 $t^n = t_0 + n\Delta t$ $n \in [\![0, N_t]\!]$

$\Delta t = T/N_t$

$x_i = a + i\Delta x$ $i \in [\![0, N_x]\!]$

$\Delta x = (b-a)/N_x$

Q3 1) $u_i^{n+1} \sim u(t^{n+1}, x_i)$, $f_i^{n+1} = f(t^{n+1}, x_i)$, $\Delta t = T/N_t$, $\Delta x = (b-a)/N_x$

2) D'après (1) on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \quad \forall (t,x) \in]t_0, t_0+T] \times]a,b[$$

ce qui entraine

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_i) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_i) = f(t^{n+1}, x_i) \quad \forall n \in [\![0, N_t[\![\quad \forall i \in]\!]0, N_x[\![\quad (A)$$

On sait que si v est suffisament régulière

$$v'(x) = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} + O(h)$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_i) = \frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On sait que si v est suffisament régulière

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_i) = \frac{u(t^{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t^{n+1}, x_i) + u(t^{n+1}, x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

(A) s'écrit alors

$$\frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + O(\Delta t) + \nu \frac{u(t^{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t^{n+1}, x_i) + u(t^{n+1}, x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) = f(t^{n+1}, x_i)$$

$$\forall n \in [\![0, N_t[\![\,, \forall i \in]\!]0, N_x[\![$$

En "oubliant" les termes en $O(\Delta t)$ et $O(\Delta x^2)$ on obtient le schéma (5)

3) D'après (4) on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t) \quad \forall t \in]t_0, t_0 + T]$$

ce qui entraine

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^{n+1}, x_{N_x}) = v_b(t^{n+1}) \quad \forall n \in [\![0, N_t[\![$$

D'après les formules de Taylor on a

$$v(x-h) = v(x) - h v'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) + O(h^3) \qquad \text{(E)}$$

et

$$v(x-2h) = v(x) - 2h v'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} v''(x) + O(h^3) \qquad \text{(F)}$$

En effectuant $4(E)-(F)$ on obtient

$$4v(x-h)-v(x-2h) = 3v(x) - 2h\,v'(x) + O(h^3)$$

et donc

$$v'(x) = \frac{v(x-2h) - 4v(x-h) + 3v(x)}{2h} + O(h^2)$$

On obtient alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^{n+1}, x_{N_x}) = \frac{u(t^{n+1}, x_{N_x-2}) - 4u(t^{n+1}, x_{N_x-1}) + 3u(t^{n+1}, x_{N_x})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

En "oubliant" le terme en $O(\Delta x^2)$ dans

$$\frac{u(t^{n+1}, x_{N_x-2}) - 4u(t^{n+1}, x_{N_x-1}) + 3u(t^{n+1}, x_{N_x})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) = v_b(t^{n+1}) \quad \forall n \in [\![0, N_t[\![$$

on obtient le schéma (6).

4)

$$(G)_i^{n+1} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1} \qquad \forall n \in [\![0, N_t[\![,\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![$$

$$(H)_i \quad U_i^0 = u_0(x_i) \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!]$$

$$(I)^n \quad U_0^n = u_a(t^n) \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!]$$

$$(J)^{n+1} \quad \frac{U_{N_x-2}^{n+1} - 4U_{N_x-1}^{n+1} + 3U_{N_x}^{n+1}}{2\Delta x} = v_b(t^{n+1}) \qquad \forall n \in [\![0, N_t[\![$$

5) Le schéma est d'ordre 1 en temps car $\frac{\partial u}{\partial t}$ approché à l'ordre 1 et d'ordre 2 en espace car $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ ont été approché à l'ordre 2 respectivement dans (1) et (2).

Q4) 1) En utilisant $(H)_i$ $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$

$$V_{i+1}^0 = u_i^0 = u_0(x_i) \quad \forall i \in [\![0, N_x]\!]$$

i.e $$V^0 = \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ u_0(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0(x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

2) Le schéma $(G)_i^{n+1}$ peut s'écrire

$$u_i^{n+1} - \nu \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) = u_i^n + \Delta t\, f_i^{n+1} \quad \forall i \in]\![0, N_x]\!["$$

i.e en posant $\beta = -\nu \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ et $\alpha = \left(1 + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$

$$\beta u_{i-1}^{n+1} + \alpha u_i^{n+1} + \beta u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t\, f_i^{n+1} \quad \forall i \in]\![0, N_x]\!["\quad (K)_i$$

Connaissant V^n, pour déterminer $V^{n+1} = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix}$ il nous manque

deux équations. Elles sont données par $(J)^{n+1}$ et $(I)^{n+1}$:

$$u_0^{n+1} = u_a(t^{n+1}) \quad (L)$$

$$u_{N_x-2}^{n+1} - 4u_{N_x-1}^{n+1} + 3u_{N_x}^{n+1} = 2\Delta x\, v_b(t^{n+1}) \quad (M)$$

$(K)_i$-(L)-(M) forment un système linéaire de N_x+1 equations à N_x+1 inconnues (le vecteur V^{n+1}). On peut donc l'écrire sous la forme ~~d'un système linéaire de~~ (7).

ou $\mathbb{A}$ est une matrice N_x+1 par N_x+1 et b un vecteur de $\mathbb{R}^{N_x+1}$

$$\begin{array}{r} (L)\to \\ (K)_1\to \\ \\ (K)_i \\ \\ (K)_{N_x-1}\to \\ (M)\to \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
\beta & \alpha & \beta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta & \alpha & \beta \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^{n+1} \\ U_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} u_a(t^{n+1}) \\ U_1^n + \Delta t\, f_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^n + \Delta t\, f_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^n + \Delta t\, f_{N_x-1}^{n+1} \\ 2\Delta x\, v_b(t^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Q5 1) Données : α, β, μ trois réels

$d \in \mathbb{N}^*$ (dimension de la matrice

Resultat : $\mathbb{M}$ la matrice d par d définie par (8)

```
Fonction 𝕄 ← AssembleMat1D(d, α, β, μ)
    𝕄 ← 𝕆_dxd (matrice nulle)
    𝕄(1,1) ← 1
    pour i ← 2 à d-1
        𝕄(i,i-1) ← β , 𝕄(i,i) ← α , 𝕄(i,i+1) ← β
    Fin
    𝕄(d,d) ← 3*μ , 𝕄(d,d-1) ← -4*μ , 𝕄(d,d-2) ← μ
```

2) Les données de la question Q3 1) sont fournies

Notation
$\mathbb{U} \in (N_x+1)\times(N_t+1)$
$\mathbb{U}(:,n) = U^{n-1}$ $\forall n \in [\![1, N_t+1]\!]$

```
N_x ← 100 , N_t ← 1000      Δt ← T/Δt      Δx ← (b-a)/N_x
X ← DisReg(a, b, N_x)     (voir exo1) ,  tt ← DisReg(t^0, t^0+T, N_t)
β ← -ν Δt/(2*Δx) ,  α ← 1 + ν Δt/Δx
𝕄 ← AssembleMat1D(N_x+1, α, β, 1)
𝕌(:,1) ← u_0(X)
:
```

:

pour $n \leftarrow 1$ à N_t

  $b \leftarrow \text{SndMembre}(\mathbb{U}(:,n), f(tt(n+1), x), u_a(tt(n+1)), v_b(t^{n+1}), \Delta t, \Delta x)$

  $\mathbb{U}(:,n+1) \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{M}, b)$

fin

La fonction SndMembre :

Données $U \in \mathbb{R}^d$, $V \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha, \beta, \Delta t, \Delta x$ 4 réels

Résultat $b \in \mathbb{R}^d$ donné par $\longrightarrow$ $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ U(1)+\Delta t V(1) \\ \vdots \\ U(d-1)+\Delta t V(d-1) \\ 2\Delta x \beta \end{pmatrix}$

Fonction $b \leftarrow \text{SndMembre}(U, V, \alpha, \beta, \Delta t, \Delta x)$

  $b(1) \leftarrow \alpha$, $b(d) \leftarrow 2 * \Delta x * \beta$

  pour $i \leftarrow 2$ à $d-1$

    $b(i) \leftarrow U(i) + \Delta t * V(i)$

  fin