

Exercice 1

Q1) 1)  $a, b$  2 réels  $a < b$   
 $\alpha, \beta, \nu, \dots$  3 réels  
 $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

2)  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

3) aucune

4) (2) et (3)

Q2) 1) c'est l'ensemble des points  $x_i = a + ih \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $h = \frac{b-a}{N}$

2) Données :  $a, b$  2 réels  $a < b$   
 $N \in \mathbb{N}^*$

Résultat :  $X \in \mathbb{R}^{N+1}$  tq  $X(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

(version algo)  
 Fonction  $X \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$

```

    h ← (b-a)/N
    pour i ← 1 à N+1
        X(i) = a + (i-1)*h
    Fin
    
```

ou

(version Matlab)  
 Fonction  $X = \text{DisReg}(a, b, N)$

```

    h = (b-a)/N;
    for i = 1:N+1
        X(i) = a + (i-1)*h;
    end
    
```

ou

(version Matlab vectorielle)  
 fonction  $X = \text{DisReg}(a, b, N)$   
 $X = a : (b-a)/N : b;$

Q3) 1) D'après (1) on a

$$-u''(x) + \nu u'(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[ \quad (\text{infinité d'équations})$$

Ce qui entraîne

$$-u''(x_i) + \nu u'(x_i) + u(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (N+1 \text{ équations}) \quad (E)$$

On sait que si  $v \in \mathcal{C}^2$

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

On en déduit donc

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (A)$$

on peut retrouver cette formule à partir des développements de Taylor de  $v(x+h)$  et  $v(x-h)$

Comme la formule (A) donne  $u'(x_i)$  en fait des à l'ordre 2, on cherche à exprimer  $u'(x_i)$  à l'ordre 2 aussi pour conserver un schéma globale d'ordre 2. D'après la formule de Taylor on a

$$u(x_{i+2}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + O(h^3) \quad (B)$$

$$u(x_{i-2}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + O(h^3) \quad (C)$$

En effectuant (B)-(C) on obtient

$$u(x_{i+2}) - u(x_{i-2}) = 2h u'(x_i) + O(h^3)$$

d'où

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+2}) - u(x_{i-2})}{2h} + O(h^2) \quad (D)$$

L'équation (E) peut s'écrire de manière équivalente

$$-\frac{u(x_{i+2}) - 2u(x_i) + u(x_{i-2}))}{h^2} + O(h^2) + v \frac{u(x_{i+2}) - u(x_{i-2}))}{2h} + u(x_i) = f(x_i) \quad (E) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

En "oubliant" les termes en  $O(h^2)$  et en notant  $u_i \approx u(x_i)$  on obtient

$$-\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{h^2} + v \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{2h} + u_i = f_i \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

avec  $f_i = f(x_i)$ ,  $\Delta x = h$  (et  $c = 1$ )

2)  $\mathcal{E} = \llbracket 0, N \rrbracket$

3) (3) s'écrit  $u(x_{N+1}) = \beta$  i.e.  $u_N = \beta$  (formule exacte)

(1) s'écrit  $u'(x_0) = \alpha$ . On va donc chercher une formule d'ordre 2 pour exprimer  $u'(x_0)$  en fonction des  $u(x_i)$ .

D'après les formules de Taylor on a

$$u(x_1) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + O(h^3) \quad (x_1 = x_0 + h) \quad (H)$$

et

$$u(x_2) = u(x_0) + 2h u'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2!} u''(x_0) + O(h^3) \quad (x_2 = x_0 + 2h) \quad (I)$$

En effectuant 4(H) - (I) (pour "éliminer" les termes en  $h^2$ ) on a

$$4u(x_1) - u(x_2) = 3u(x_0) + 2h u'(x_0) + O(h^3)$$

On obtient alors

$$u'(x_0) = - \frac{3u(x_0) - 4u(x_2) + u(x_4)}{2h} + O(h^2)$$

L'équation au limite  $u'(x_0) = \alpha$  peut s'écrire de manière équivalente

$$- \frac{3u(x_0) - 4u(x_2) + u(x_4)}{2h} + O(h^2) = \alpha$$

En "oubliant" le terme en  $O(h^2)$ , on obtient

$$- \frac{3u_0 - 4u_2 + u_4}{2h} = \alpha \quad (J)$$

4) le schéma global s'écrit

$$- \frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{h^2} + \nu \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{2h} + u_i = f_i \quad \forall i \in ]0, N[ \quad (K)$$

$$- \frac{3u_0 - 4u_2 + u_4}{2h} = \alpha \quad (J)$$

$$u_N = \beta \quad (L)$$

Il est d'ordre 2 car toutes les dérivées ont été approchées par des formules d'ordre 2.

Q4

Les équations (K), (J), (L) sont linéaires en les  $(u_i)_{i \in [0, N]}$ .

Il y a  $N+1$  équations, c'est donc un système linéaire à  $N+1$  inconnues et  $N+1$  équations. Il s'écrit donc sous la forme

$$AV = F \quad \text{où} \quad V = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Pour simplifier on réécrit (K)

$$- (u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}) + \frac{\nu h}{2} (u_{i+2} - u_{i-2}) + h^2 u_i = h^2 f_i \quad \forall i \in ]0, N[$$

ou encore

$$\left(\frac{\nu h}{2} - 1\right) u_{i+2} + (2+h^2) u_i - \left(\frac{\nu h}{2} + 1\right) u_{i-2} = h^2 f_i, \quad \forall i \in ]0, N[ \quad (M)_i$$

et (J) devient

$$3u_0 - 4u_2 + u_4 = -2h\alpha \quad (N)$$

On pose  $\mu_3 = \frac{\nu h}{2} - 1$ ,  $\mu_2 = 2+h^2$  et  $\mu_1 = -\left(\frac{\nu h}{2} + 1\right)$

$$\begin{array}{l}
 (M) \rightarrow \\
 (M)_1 \rightarrow \\
 (M)_2 \rightarrow \\
 \vdots \\
 (M)_i \rightarrow \\
 \vdots \\
 (M)_{N-1} \rightarrow \\
 (L) \rightarrow
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 3 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & & & & & \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & & & 
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_0 \\
 u_1 \\
 \vdots \\
 u_i \\
 \vdots \\
 u_{N-1} \\
 u_N
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -2h\alpha \\
 h^2 f_1 \\
 h^2 f_2 \\
 \vdots \\
 h^2 f_i \\
 \vdots \\
 h^2 f_{N-1} \\
 \beta
 \end{pmatrix}$$

Q5

Données  $d$  entier (dimension de la matrice)

$$\alpha \in \mathbb{R}^3 \quad \alpha(i) = \alpha_i \quad \forall i \in [1, 3]$$

$$\beta \in \mathbb{R}^3 \quad \beta(i) = \beta_i \quad \forall i \in [1, 3]$$

$$\mu \in \mathbb{R}^3 \quad \mu(i) = \mu_i \quad \forall i \in [1, 3]$$

Résultat  $M$  matrice de  $M_d(\mathbb{R})$  définie par (6)

Fonction  $M \leftarrow \text{AssembleMat}(d, \alpha, \mu, \beta)$

$M \leftarrow \mathcal{O}_{d,d}$  (matrice nulle)

$$M(1,1) \leftarrow \alpha(1), \quad M(1,2) \leftarrow \alpha(2), \quad M(1,3) \leftarrow \alpha(3)$$

pour  $i \leftarrow 2$  à  $d-1$

$$M(i, i-1) \leftarrow \mu(1), \quad M(i, i) \leftarrow \mu(2), \quad M(i, i+1) \leftarrow \mu(3)$$

Fin

$$M(d, d-2) \leftarrow \beta(1), \quad M(d, d-1) \leftarrow \beta(2), \quad M(d, d) \leftarrow \beta(3)$$

Q6

$a, b, \alpha, \beta, \nu, f$  donnés

$N \leftarrow 100, h \leftarrow (b-a)/N$

$X \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$

$\mu \leftarrow [-(\nu \star h / 2 + 1); 2 + h \star h; (\nu \star h) / 2 - 1]$

$F \leftarrow f(X)$

$b \leftarrow [-2 \star h \star \alpha; F(2:N-1); \beta]$  % calcul du second membre

$IA \leftarrow \text{AssembleMat}([3, -4, 1], \mu, [0, 0, 1])$

$V \leftarrow \text{RSL}(IA, b)$

Exercice 2

Q1 1) Equations aux Dérivées Partielles

2) De manière générale  $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g$

En posant  $y = t$  et en identifiant avec (1) on obtient

$$a = -\nu < 0, \quad b = c = d = f = 0 \quad e = 1$$

et on a  $\Delta = 0$ .

Cette E.D.P est parabolique.

- 3)  $\nu \in \mathbb{R} \quad \nu > 0$   
 $t_0 \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R} \quad T > 0$   
 $a, b$  2 réels  $a < b$   
 $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u_a : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u_b : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f : ]t_0, t_0 + T[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

4)  $u : [t_0, t_0 + T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

5) (2)

6) (3) et (4)

Q2 1)  $u_i^{n+1} \sim u(t^{n+1}, x_i), \quad f_i^{n+1} = f(t^{n+1}, x_i), \quad \Delta t = T/N_t, \quad \Delta x = (b-a)/N_x$   
 2) D'après (1) on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) \quad \forall (t, x) \in ]t_0, t_0 + T[ \times ]a, b[$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_i) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_i) = f(t^{n+1}, x_i) \quad \forall n \in [0, N_t[ \quad \forall i \in ]0, N_x[ \quad (A)$$

On sait que si  $v$  est suffisamment régulière

$$v'(x) = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} + O(h)$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_i) = \frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On sait que si  $v$  est suffisamment régulière

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_i) = \frac{u(t^{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t^{n+1}, x_i) + u(t^{n+1}, x_{i-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

(A) s'écrit alors

$$\frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + \nu \frac{u(t^{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t^{n+1}, x_i) + u(t^{n+1}, x_{i-1}))}{\Delta x^2} = f(t^{n+1}, x_i)$$

$\forall n \in \llbracket 0, N_t \llbracket, \forall i \in \llbracket 0, N_x \llbracket$

En "oubliant" les termes en  $O(\Delta t)$  et  $O(\Delta x^2)$  on obtient le schéma (5)

3) D'après (4) on a

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, b) = v_b(t) \quad \forall t \in ]c_0, c_0 + T]$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^{n+1}, x_i) = v_b(t^{n+1}) \quad \forall n \in \llbracket 0, N_t \llbracket$$

D'après les formules de Taylor on a

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + \frac{h^2}{2!} v''(x) + O(h^3) \quad (E)$$

$$\text{et } v(x-2h) = v(x) - 2hv'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} v''(x) + O(h^3) \quad (F)$$

En effectuant 4(E) - (F) on obtient

$$4v(x-h) - v(x-2h) = 3v(x) - 2hv'(x) + O(h^3)$$

et donc

$$v'(x) = \frac{v(x-2h) - 4v(x-h) + 3v(x)}{2h} + O(h^2)$$

On obtient alors

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t^{n+1}, x_{N_x}) = \frac{v(t^{n+1}, x_{N_x-2}) - 4v(t^{n+1}, x_{N_x-1}) + 3v(t^{n+1}, x_{N_x})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

En "oubliant" le terme en  $O(\Delta x^2)$  dans

$$\frac{v(t^{n+1}, x_{N_x-2}) - 4v(t^{n+1}, x_{N_x-1}) + 3v(t^{n+1}, x_{N_x})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) = v_b(t^{n+1}) \quad \forall n \in [0, N_t[$$

on obtient le schéma (6).

$$4) \quad (G)_i^{n+1} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} - v \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1} \quad \forall n \in [0, N_t[, \forall i \in ]0, N_x[$$

$$(H)_i \quad U_i^0 = v_0(x_i) \quad \forall i \in [0, N_x]$$

$$(I)^n \quad U_0^n = v_a(t^n) \quad \forall n \in [0, N_t]$$

$$(J)^{n+1} \quad \frac{U_{N_x-2}^{n+1} - 4U_{N_x-1}^{n+1} + 3U_{N_x}^{n+1}}{2\Delta x} = v_b(t^{n+1}) \quad \forall n \in [0, N_t[$$

5) Le schéma est d'ordre 1 en temps car  $\frac{\partial v}{\partial t}$  approché à l'ordre 1 et d'ordre 2 en espace car  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  ont été approché à l'ordre 2 respectivement dans (1) et (2).

Q4 1) En utilisant  $(H)_i \quad \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$

$$U_{i+1}^0 = U_i^0 = U_0(x_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$$

$$\text{i.e. } U^0 = \begin{pmatrix} U_0(x_0) \\ U_0(x_1) \\ \vdots \\ U_0(x_{N_x}) \end{pmatrix}$$

2) Le schéma  $(G)_i^{n+1}$  peut s'écrire

$$U_i^{n+1} - \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) = U_i^n + \Delta t F_i^{n+1} \quad \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$$

Correction  
Ipekda Melika

$$\text{i.e. en posant } \beta = -\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \text{ et } \alpha = (1 + 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2})$$

$$\beta U_{i-1}^{n+1} + \alpha U_i^{n+1} + \beta U_{i+1}^{n+1} = U_i^n + \Delta t F_i^{n+1} \quad \forall i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket \quad (K)_i$$

Connaissant  $U^n$ , pour déterminer  $U^{n+1} = \begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix}$  il nous manque

deux équations. Elles sont données par  $(J)^{n+1}$  et  $(I)^{n+1}$  :

$$U_0^{n+1} = U_a(t^{n+1}) \quad (L)$$

$$U_{N_x-2}^{n+1} - 4U_{N_x-1}^{n+1} + 3U_{N_x}^{n+1} = 2\Delta x v_b(t^{n+1}) \quad (M)$$

$(K)_i$ - $(L)$ - $(M)$  forment un système linéaire de  $N_x+2$  équations à  $N_x+2$  inconnues (le vecteur  $U^{n+1}$ ). On peut donc l'écrire sous la forme d'un système linéaire de  $(7)$ .

ou  $IA$  est une matrice  $N_x+2$  par  $N_x+2$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{N_x+2}$

$$\begin{array}{l}
 (L) \rightarrow \\
 (K)_2 \rightarrow \\
 \vdots \\
 (K)_i \\
 \vdots \\
 (K)_{N_x-1} \\
 (M) \rightarrow
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\
 \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 & \dots & \dots
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_0^{n+1} \\
 U_1^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_i^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_{N_x-1}^{n+1} \\
 U_{N_x}^{n+1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 U_0(t^{n+1}) \\
 U_1^n + \Delta t F_1^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_i^n + \Delta t F_i^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_{N_x-1}^n + \Delta t F_{N_x-1}^{n+1} \\
 2\Delta x \sqrt{b}(t^{n+1})
 \end{pmatrix}$$

Q5) 1) Données :  $\alpha, \beta, \mu$  trois réels  
 $d \in \mathbb{N}^*$  (dimension de la matrice)

Résultat :  $M$  la matrice  $d$  par  $d$  définie par (3)

Fonction  $M \leftarrow \text{AssembleMat1D}(d, \alpha, \beta, \mu)$

$M \leftarrow \mathbb{O}_{d \times d}$  (matrice nulle)

$M(1,1) \leftarrow 1$

pour  $i \leftarrow 2$  à  $d-1$

$M(i, i-1) \leftarrow \beta, M(i, i) \leftarrow \alpha, M(i, i+1) \leftarrow \beta$

Fin

$M(d, d) \leftarrow 3*\mu, M(d, d-1) \leftarrow -4*\mu, M(d, d-2) \leftarrow \mu$

2) Les données de la question Q3 1) sont fournies

$N_x \leftarrow 100, N_t \leftarrow 1000, \Delta t \leftarrow T/\Delta t, \Delta x \leftarrow (b-a)/N_x$

$X \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N_x)$  (voir exo 1),  $(t, T) \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0+T, N_t)$

$\beta \leftarrow -\nu \Delta t / (\Delta x^2), \alpha \leftarrow 1 + 2\nu \Delta t / \Delta x^2$

$M \leftarrow \text{AssembleMat1D}(N_x+1, \alpha, \beta, 1)$

$U(:, 1) \leftarrow U_0(X)$

:

Notation  
 $U \in \mathbb{R}^{(N_x+1) \times (N_t+1)}$   
 $U(i, n) = U^{n-1}$   
 $\forall n \in [1, N_t+1]$

pour  $n \leftarrow 1$  à  $N_t$

$b \leftarrow \text{SndNembre}(U(:,n), f(t(n+1), x), U_a(t(n+1)), v_b(t(n+1)), \Delta t, \Delta x)$

$W(:,n+1) \leftarrow \text{RSL}(M, b)$

fin

La fonction SndNembre :

Données  $U \in \mathbb{R}^d$ ,  $V \in \mathbb{R}^d$  et  $\alpha, \beta, \Delta t, \Delta x$  4 réels

Résultat  $b \in \mathbb{R}^d$  donné par  $\longrightarrow$

Fonction  $b \leftarrow \text{SndNembre}(U, V, \alpha, \beta, \Delta t, \Delta x)$

$b(1) \leftarrow \alpha$ ,  $b(d) \leftarrow 2 * \Delta x * \beta$

pour  $i \leftarrow 2$  à  $d-1$

$b(i) \leftarrow U(i) + \Delta t * V(i)$

fin

$$b = \begin{pmatrix} \alpha \\ U(1) + \Delta t V(1) \\ \vdots \\ U(d-1) + \Delta t V(d-1) \\ 2 \Delta x \beta \end{pmatrix}$$