I/ Introduction

1° Définitions

Definition 1 E.D.P.

Une equation aux dérivées partielles (E.D.P.) fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps, espace, ..) ainsi que les dérivées partielles de la variable dépendante par rapport à ces variables indépendantes. Par exe.

Par exemple, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(Equation d'advection)}$$

est une E.D.P. La variable dépendante est u, les variables indépendantes sont t et x. α peut-être une fonction de t, x et u

Definition 2 Ordre d'une E.D.P.

L'ordre d'une E.D.P est l'ordre le plus élevé parmis les dérivées partielles apparaissant dans l'E.D.P.

Definition 3 E.D.P linéaires / quasi-linéaires / non-linéaires

- On dit qu'une E.D.P. est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante. (ordre 0 compris)
- On dit qu'une E.D.P. est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. Sinon elle est non-linéaire

Par exemple l'E.D.P.

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c$$

est **non-linéaire** si a,b ou c sont dépendants de u
est **quasi-linéaire** si a et b dont indépendants de u
est **linéaire** si a,b et c sont indépendants de u

De même l'E.D.P

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d$$

est **non-linéaire** si a,b,c ou d sont dépendants de u
est **quasi-linéaire** si a,b et c dont indépendants de u
est **linéaire** si a,b,c et d sont indépendants de u

2° Classification des EDP linéaire d'ordre 2

Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 générique

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \qquad (1)$$

où u est une fonction de (x,y) et a,b,c,d,e,f,g des fonctions de (x,y)

Le type de l'EDP dépend de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta > 0$: EDP <u>hyperbolique</u>
* $\Delta = 0$: EDP <u>parabolique</u>
* $\Delta < 0$: EDP <u>elliptique</u>

a) EDP hyperbolique : equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (2)$$

Ici $u(t,x)$ est le déplacement vertical de l'onde au temps t et au point x.
α est la célérité de l'onde.

Pour mettre (2) sous la forme (1), on pose $y=t$ et on identifie :

$a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ $d = e = f = g = 0$

et on a

$$\Delta = 4 > 0$$

Cette EDP est bien hyperbolique.

b) EDP parabolique : equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3)$$

où $u(t,x)$ est la temperature au temps t et au point x
ν est le coefficient de diffusivité thermique.

Pour mettre (3) sous la forme (1), on pose $y=t$ et on identifie

$a = -1$ $b = c = d = f = g = 0$ $e = 1$.

et on a

$$\Delta = 0$$

Cette EDP est bien parabolique

c EDP elliptique : equation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

où $u(x,y)$ peut-être un déplacement vertical, un potentiel, ... au point (x,y) de l'espace suivant le problème modélisé.

On a en identifiant (4) à (1)

$$a = c = 1 \quad , \quad b = d = e = f = g = 0$$

et

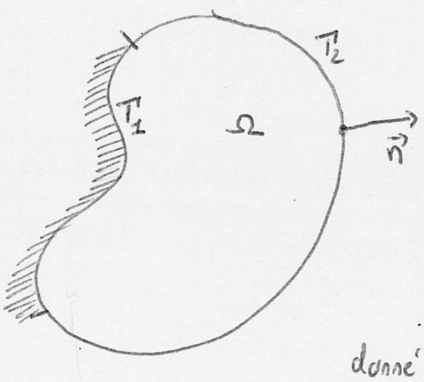
$$\Delta = -4 < 0$$

Cette EDP est bien elliptique.

3] Exemples stationnaires

Deformation d'un

a) Membrane elastique



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

membrane élastique fixée en Γ_1 et libre en Γ_2 soumise à une force $f(x,y)dxdy$ sur chaque élément de surface $dxdy$.
On cherche le déplacement vertical $u(x,y)$ de cette membrane. ~~u est solution de~~
Un modèle simplifié ~~de cette membrane~~ est donné par

$\Gamma = \partial\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u_{|\Gamma_2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_2} = 0 \end{cases}$$

conditions aux limites (C.L.)

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω, l'operateur Δ est le laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

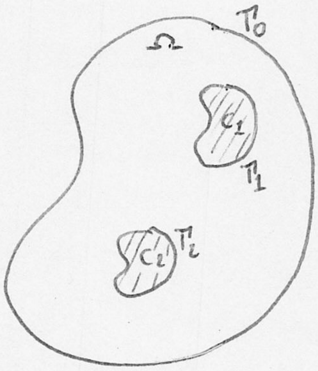
et

$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \langle \nabla u(x,y), n(x,y) \rangle \quad \text{avec } \nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y)$$

(gradient de u)

b) Conducteurs thermiques

Deux conducteurs thermiques C_1 et C_2 sont dans une enceinte close Ω



L'exterieur de cette enceinte est à une temperature de 20°C
Les conducteur C_1 est à une temperature de 60°
et C_2 300°
On attend suffisament pour atteindre l'équilibre thermique
On cherche $u(x,y)$ temperature au point (x,y) de Ω
~~un modèle~~ solution de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 \\ u_{|\Gamma_0} = 20° \\ u_{|\Gamma_1} = 60° \\ u_{|\Gamma_2} = 300° \end{cases} \quad \text{ou} \quad \operatorname{div}(K.\operatorname{grad} u) = 0$$

C.L.

K est la conduction thermique du materiau en $(x,y) \in \Omega$

l'opérateur $\nabla.$ est l'opérateur de divergence :

$$\nabla.\begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$$

Donc

$$\nabla.\left(K\, \nabla u \right) = \nabla.\begin{pmatrix} K \frac{\partial u}{\partial x} \\ K \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Si K est constant, on retrouve le Laplacien.

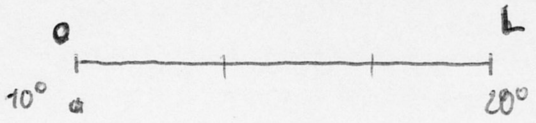
4) Exemples instationnaires

a) Conduction thermique dans une barre.

Une barre "isolée de l'exterieure" de longueur L est à la température de 100°C

On la refroidi par ses extrémités qui sont portées de 100° à 10°C "à gauche" et 20° "à droite" en 1 seconde et maintenu à ses temperatures.

$u(t,x)$ est la temperature de la barre au temps t et au pt $x \in [0,L]$



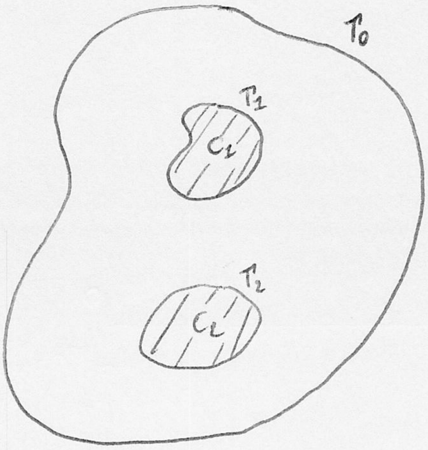
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla u) = 0 & \forall t>0,\ \forall x \in]0,L[\\ u(t,0) = u_0(t) & \\ u(t,L) = u_L(t) & \Big\} \ \forall t>0 \quad \text{Conditions aux limites} \quad \text{C.L.} \\ u(0,x) = 100 & \forall x \in [0,L] \end{cases}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} 100 - 90t & \forall t \in [0,1] \\ 10 & \forall t \geq 1 \end{cases}$$

$$u_L(t) = \begin{cases} 100 - 80t & \forall t \in [0,1] \\ 20 & \forall t \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{K}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, L/3] \\ 1/L & \text{si } x \in]L/3, 2L/3] \\ 2 & \text{si } x \in]\frac{2L}{3}, L] \end{cases}$$

b Conduction thermique dans une plaque homogène (même conducteur thermique



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(\chi \nabla u) = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} u(t,x,y) = u_0(t,x,y) & \forall (x,y) \in \Gamma_0 \\ u(t,x,y) = u_1(t,x,y) & \forall (x,y) \in \Gamma_1 \\ u(t,x,y) = u_2(t,x,y) & \forall (x,y) \in \Gamma_2 \end{array}\right) \quad C.L.$$

$$u(0,x,y) = 20 \qquad \forall (x,y) \in \Omega \qquad C.I.$$

$$u_0(t,x,y) = 20 \quad \forall (x,y) \in \Gamma_0 \quad \forall t > 0$$

$$u_1(t,x,y) = \begin{cases} 20 + 40t & t \in [0,1] \\ 60 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$u_2(t,x,y) = \begin{cases} 20 + (300-20)t & \forall t \in [0,1] \\ 300 & t \geq 1 \end{cases}$$

II] Méthode des différences finies ~~pour~~ (1D en espace)

(a) Pb modèle stationnaire :

$$(I)\quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]a,b[\\ u(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$$

* Développement de Taylor $h>0$

$$(1)\quad u(x+h) = u(x) + h\,u'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_+) \qquad \xi_+ \in]x, x+h[$$

$$(2)\quad u(x-h) = u(x) - h\,u'(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!}u^{(4)}(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_-) \qquad \xi_- \in]x-h, x[$$

$$(1)+(2) : \quad u(x+h)+u(x-h) = 2u(x) + h^2 u^{(2)}(x) + \frac{h^4}{4!}\left(u^{(4)}(\xi_+)+u^{(4)}(\xi_-)\right)$$

$$u^{(2)}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\xi_+)+u^{(4)}(\xi_-)\right) \qquad (3)$$

On a aussi

$$u^{(1)}(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \frac{h}{2}u^{(2)}(\xi) \qquad \xi \in]x-h, x[\qquad (4)$$

* On discrétise l'intervalle $[a,b]$

$$x_i = a + ih \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{N} \qquad i \in [\![0,N]\!]$$

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]a,b[\\ u(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i) & \forall i \in [\![1, N-1]\!] \\ u(x_0) = \alpha \\ u'(x_N) = \beta \end{cases}$$

$$\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} -\dfrac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \dfrac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\xi_+^i) + u^{(4)}(\xi_-^i)\right) = f(x_i) & \forall i \in [\![1, N-1]\!] \\ & \xi_+^i \in]x_i, x_{i+1}[\\ & \xi_-^i \in]x_{i-1}, x_i[\\ u(x_0) = \alpha \\ \dfrac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \dfrac{h}{2}u^{(2)}(\xi_N) = \beta & \xi_N \in]x_{N-1}, x_N[\end{cases}$$

On prend comme schéma

$$(5)\quad \begin{cases} (a)\ -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 f_i & \forall i \in [\![1, N-1]\!] \\ (b)\ u_0 = \alpha \\ (c)\ u_N - u_{N-1} = h\beta \end{cases}$$

où $u_i \sim u(x_i)$

Les inconnues de (5) sont les U_i $\forall i \in [\![0, N]\!]$

Il y a $N+1$ inconnues et $N+1$ équations linéaires. On est ramené à résoudre le système

$$\mathbb{A}\, U = b$$

avec
$$U = \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}) \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \hline h^2 f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ \hline h\beta \end{pmatrix}$$

ou encore $\mathbb{L}_h\, U_h = b_h$ avec

$$U_h = \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

$$\mathbb{L}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/h & 1/h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}) \qquad b_h = \begin{pmatrix} \alpha \\ \hline f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ \hline \beta \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{E}_i$ l'erreur de consistance du schéma (5) aux points x_i $\forall i \in [\![0,N]\!]$

On a

$$(I') \begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i) & \forall i \in [\![1,N-1]\!] & (I')(a) \\ u(x_0) = \alpha & & (I')(b) \\ u'(x_N) = \beta & & (I')(c) \end{cases}$$

et

$$(5') \begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i & \forall i \in [\![1,N-1]\!] & (5')(a) \\ u_0 = \alpha & & (5')(b) \\ \dfrac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta & & (5')(c) \end{cases}$$

Pour déterminer l'erreur de consistance du schéma discret (5') par rapport à (I') on remplace, dans le schéma discret u_i par $u(x_i)$ et on soustrait en (5')(a) à (I')(a), 5'b à I'b et 5'c à I'c pour obtenir les erreurs de consistance aux points x_i $\forall i \in [\![0,N]\!]$

$(I'a) - (5'a)$: $\mathcal{E}_i = \left| -u''(x_i) - \left(- \dfrac{u(x_{i+1}) - 2u_i(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \right) \right|$

$(I'b) - (5'b)$: $\mathcal{E}_0 = |u(x_0) - u(x_0)| = 0$

$(I'c) - (5'c)$: $\mathcal{E}_N = \left| u'(x_N) - \dfrac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} \right|$

Def [L'erreur (globale) de consistance est

$$\mathcal{E} = \max_{i \in [\![0,N]\!]} \mathcal{E}_i$$

Or

$\mathcal{E}_i = C_i h^2$ $\forall i \in [\![1,N-1]\!]$ (approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde)

$\mathcal{E}_0 = 0$

$\mathcal{E}_N = D h$ (approximation d'ordre 1 de la dérivée première)

Quand h est suffisament petit

$$\mathcal{E} = O(h)$$

Def [On dit qu'un schéma est d'ordre p si l'erreur de consistance se comporte comme h^p i.e. $\mathcal{E} = O(h^p)$