

Introduction à la résolution des E.D.O. ^a



Support de cours
Ingénieurs Sup'Galilée
Energétique - 1ère année

a. Version beta 0.6 du 3 janvier 2015

par Cuvelier François

Université Paris Nord - Institut Galilée - LAGA
Av. J.-B. Clément 93430 Villetaneuse
email : couvelier@math.univ-paris13.fr

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Exemples	3
1.1.1	Météorologie	3
1.1.2	Biologie	4
1.1.3	Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky	5
1.1.4	Mécanique	6
1.2	Définition des E.D.O.	8
1.3	Formulation générale : le problème de Cauchy	10
1.4	Dérivation numérique	12
1.5	Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension $d = 1$	15
1.6	Exemple	16
1.7	Stabilité	16
1.8	Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension d	19
2	Méthode à un pas ou à pas séparés	20
2.1	Schéma général	20
2.2	Convergence	20
2.3	Stabilité	21
2.4	Consistance	21
2.5	Ordre	21
3	Méthode de Runge-Kutta	21
3.1	Principe	21
3.2	Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2	23
3.3	Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4	23
4	Méthodes à pas multiples	24
4.1	Exemple : schéma de point milieu	24
4.2	Le principe	24
4.3	Méthodes d'Adams-Bashforth	26
4.4	Méthodes d'Adams-Moulton	26
4.5	Schéma prédicteur-correcteur	26
4.5.1	Principe	26
4.5.2	Exemple	27
4.5.3	Comparaison avec Runge-Kutta	28
5	Exercices corrigés	28

1 Introduction

1.1 Exemples

1.1.1 Météorologie

Modèle de Lorentz :

Source Wikipedia Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les premiers ordinateurs existant au temps de Lorenz. Celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté, beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ.

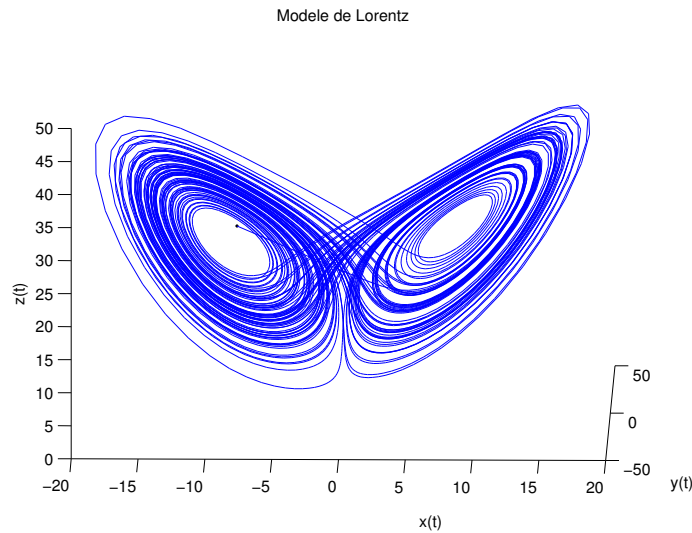
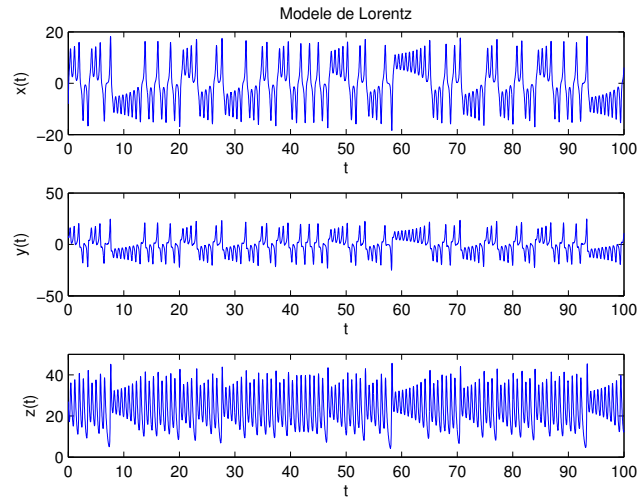
$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ et les données initiales $x(0) = -8$, $y(0) = 8$ et $z(0) = \rho - 1$.

Dans ces équations, σ, ρ - respectivement le nombre de Prandtl et le rapport du nombre de Rayleigh sur un Rayleigh critique - et β sont trois paramètres réels.

$x(t)$ est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire (Lorenz 1963 p.135).

La résolution numérique de ce modèle donne



1.1.2 Biologie

Considérons une population y d'animaux dans un milieu ambiant où au plus B animaux peuvent coexister. On suppose que initialement la population soit $y_0 \ll B$ et que le facteur de croissance des animaux soit égal à une constante C . Dans ce cas, l'évolution de la population au cours du temps sera proportionnelle au nombre d'animaux existants, sans toutefois que ce nombre ne dépasse la limite B . Cela peut s'exprimer à travers l'équation

$$y'(t) = Cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{B} \right), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (1.2)$$

La résolution de cette équation permet de trouver l'évolution de la population au cours du temps.

On considère maintenant deux populations, y_1 et y_2 , où y_1 sont les proies et y_2 sont les prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

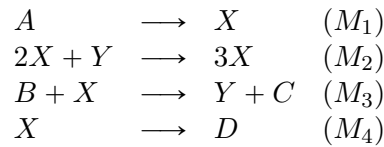
$$\begin{cases} y_1'(t) &= C_1 y_1(t)[1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)], \\ y_2'(t) &= -C_2 y_2(t)[1 - d_1 y_1(t)], \end{cases} \quad (1.3)$$

où C_1 et C_2 sont les facteurs de croissance des deux populations, d_1 et d_2 tiennent compte de l'interaction entre les deux populations, tandis que b_1 est lié à la quantité de nourriture disponible pour la population des proies y_1 . Ce système d'équations différentielles est connu comme modèle de *Lotka-Volterra*.

1.1.3 Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky

Sous certaines conditions, des réactions chimiques peuvent être oscillantes. Par exemple, le mélange d'une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique avec une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entraîner une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleu avec une période de 7 secondes.

Le modèle associé est nommé **modèle du bruxelator** basé sur les équations chimiques :



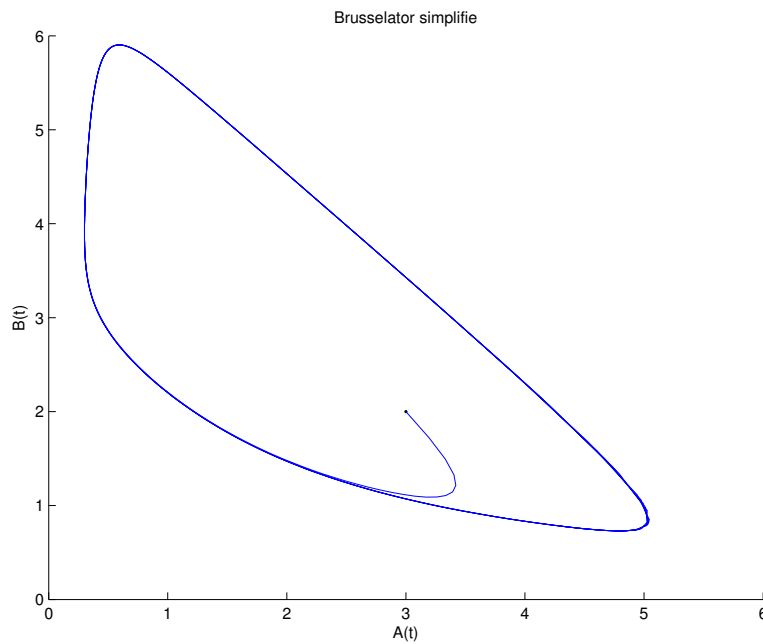
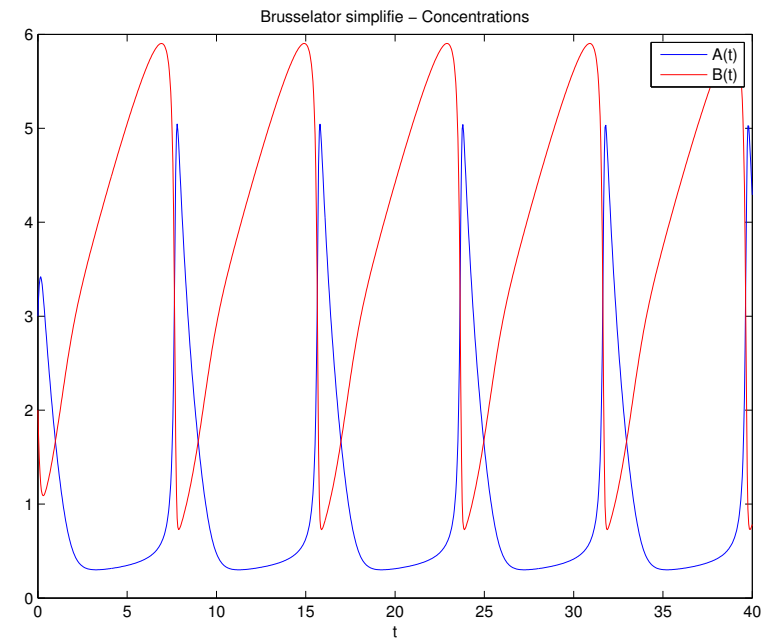
On note k_i , $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ les vitesses de réactions des équations (M_i) . On obtient alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} A'(t) &= -k_1 A(t) \\ B'(t) &= -k_3 B(t) X(t) \\ X'(t) &= k_1 A(t) + k_2 X^2(t) Y(t) - k_3 B(t) X(t) - k_4 X(t) \\ Y'(t) &= -k_2 X^2(t) Y(t) + k_3 B(t) X(t) \end{cases}$$

Exemple 1 Dans cet exemple, on étudie le problème simplifié du *Bruxelator*. Lorsque les réactions de (??) ont des constantes de réactions k_1, \dots, k_4 égales respectivement à 1, $\alpha > 0$, 1 et 1, et que les concentrations de A et B sont constantes, respectivement égales à 1 et $\beta > 0$, on est alors amené à résoudre l'E.D.O. $\forall t \in]0, T]$,

$$\begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t) Y(t) - (\beta + 1) X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t) Y(t) + \beta X(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Par exemple, avec le jeu de données $\alpha = 1$, $\beta = 3.5$ et les conditions initiales $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$ on obtient des oscillations :



1.1.4 Mécanique

Le pendule pesant le plus simple est constitué d'un petit objet pesant accroché à une tige de masse négligeable devant celle de l'objet. L'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule. Un tel pendule, sans viscosité, est appelé pendule pesant simple. On note $\theta(t)$ l'angle que fait le

pendule par rapport à l'axe vertical, à un instant t , L la longueur de la tige, m sa masse et g l'accélération de la pesanteur. L'équation différentielle est donnée par

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (1.5)$$

Si le pendule est soumis à un frottement visqueux de coefficient ν , l'expression de l'accélération angulaire devient :

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) + \frac{\nu}{mL^2} \theta'(t) = 0. \quad (1.6)$$

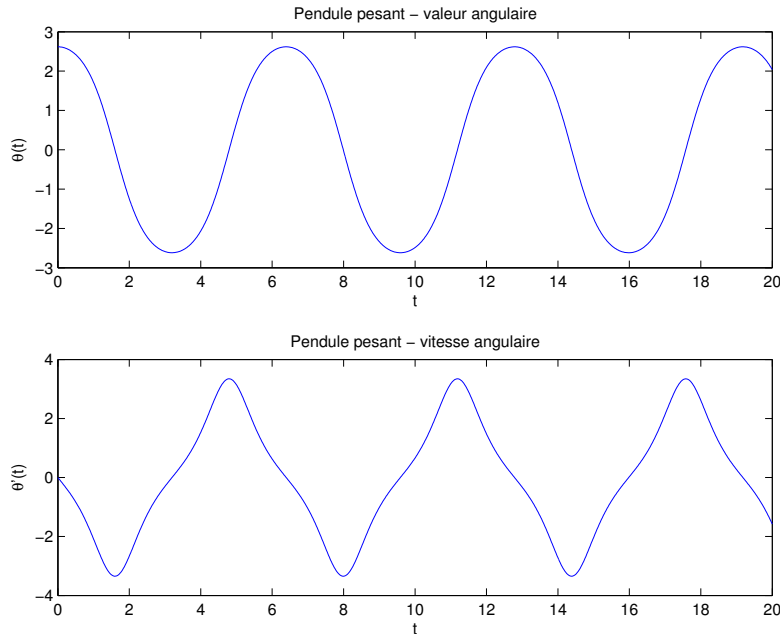
Exemple 2 Dans cet exemple, on étudie le problème du pendule pesant sans viscosité décrit au paragraphe 1.1.4. On est donc ramené à résoudre l'E.D.O.

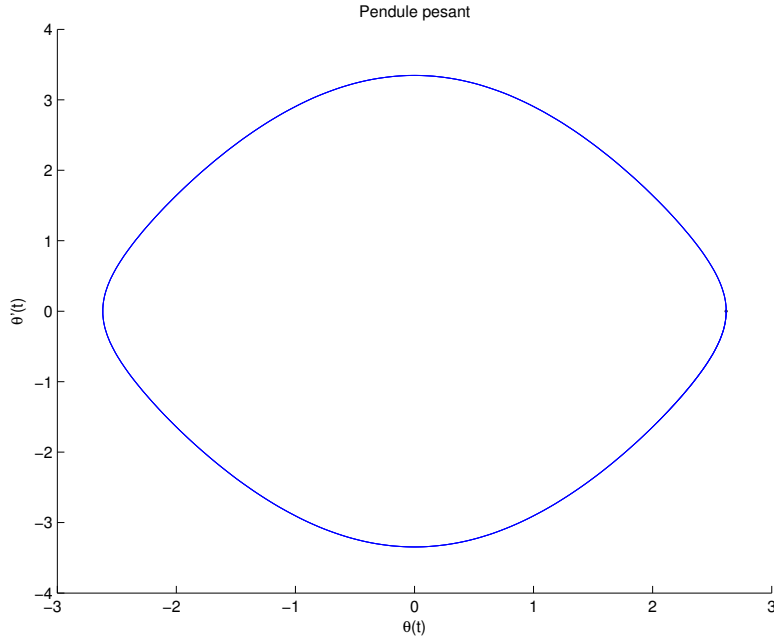
$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0, \quad \forall t \in]0, T], \quad (1.7)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(0) &= \theta_0, & \text{position angulaire initiale,} \\ \theta'(0) &= \theta'_0, & \text{vitesse angulaire initiale,} \end{cases} \quad (1.8)$$

Par exemple, avec le jeu de données $\frac{g}{L} = 3$ et les conditions initiales $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ et $\theta'_0 = 0$ on obtient





1.2 Définition des E.D.O.

Soit une fonction \mathbf{y} définie sur un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^m de classe \mathcal{C}^p (continûment dérivable d'ordre p) et on note $\mathbf{y}^{(p)}$ la dérivée d'ordre p de \mathbf{y} .

Définition 1.1 On appelle *équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre p* une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

Définition 1.2 On appelle *forme canonique d'une E.D.O.* une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (1.9)$$

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles d'ordre 1. En effet, en introduisant p fonctions définies par

$$\begin{cases} z^{[1]}(t) = \mathbf{y}^{(0)}(t) \\ z^{[2]}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ z^{[p]}(t) = \mathbf{y}^{(p-1)}(t) \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{dz^{[1]}}{dt}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{z}^{[2]}(t), \\ \frac{dz^{[2]}}{dt}(t) = \mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{z}^{[3]}(t), \\ \vdots \\ \frac{dz^{[p]}}{dt}(t) = \mathbf{y}^{(p)}(t). \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(p)}(t) &= \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)) \\ &= \mathcal{G}(t, \mathbf{z}^{[1]}(t), \mathbf{z}^{[2]}(t), \dots, \mathbf{z}^{[p]}(t)). \end{aligned}$$

On obtient alors le système différentiel d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \frac{dz^{[1]}}{dt}(t) = \mathbf{z}^{[2]}(t), \\ \frac{dz^{[2]}}{dt}(t) = \mathbf{z}^{[3]}(t), \\ \vdots \\ \frac{dz^{[p]}}{dt}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{z}^{[1]}(t), \mathbf{z}^{[2]}(t), \dots, \mathbf{z}^{[p]}(t)). \end{cases} \quad (1.10)$$

Exemple 1 (suite) Pour obtenir la forme canonique de (1.4), on pose $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ avec $y_1(t) = X(t)$ et $y_2(t) = Y(t)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ Y^{(1)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha y_1^2(t)y_2(t) - (\beta + 1)y_1(t) \\ -\alpha y_1^2(t)y_2(t) + \beta y_1(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec $p = 1$ et

$$\begin{cases} \mathcal{G}_b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \mathbf{z}) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 + \alpha z_1^2 z_2 - (\beta + 1)z_1 \\ -\alpha z_1^2 z_2 + \beta z_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

la forme canonique est donnée par

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathcal{G}_b(t, \mathbf{y}(t)). \quad (1.11)$$

■

Exemple 2 (suite) Pour obtenir la forme canonique de (1.7), on prend $p = 2$ et


$$\begin{cases} \mathcal{G}_p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u, v) \longmapsto -\frac{g}{L} \sin(u) \end{cases}$$

La forme canonique est alors donnée par

$$\theta^{(2)}(t) = \mathcal{G}_p(t, \theta(t), \theta^{(1)}(t)). \quad (1.12)$$

■

1.3 Formulation générale : le problème de Cauchy

 **Définition 1.3 - problème de Cauchy**

Soit f l'application continue définie par

$$\begin{aligned} f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec $T \in]0, +\infty]$. Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction \mathbf{y} définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.14)$$

On supposera qu'une telle solution existe.

Exemple 1.4 • *Un problème de Cauchy peut être **linéaire**, comme par exemple :*

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel $f(t, v) = 3v - 3t$ et dont la solution est $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$.

• *On peut avoir aussi des problèmes **non-linéaires**, comme :*

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$. Ce problème admet les **trois solutions** suivantes : $y(t) = 0$, $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$ et $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$.

• *Le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t), & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet comme solution la fonction $y(t) = \tan(t)$ avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire une **solution locale**. ■

Exemple 1 (suite) *La forme canonique (1.11) est d'ordre 1, on obtient alors directement le problème de Cauchy associé : chercher une fonction \mathbf{y} définie par*

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (1.15)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2 \quad (1.16)$$

avec $\mathbf{f} \equiv \mathcal{G}_b$ et $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ■

Exemple 2 (suite) La forme canonique (1.12) est d'ordre 2. On se ramène à un système différentiel du 1er ordre en posant :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta^{(1)}(t) \end{pmatrix}$$

On a alors, en dérivant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ \theta^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ \mathcal{G}_p(t, \theta(t), \theta^{(1)}(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \mathcal{G}_p(t, y_1(t), y_2(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p : [0, T] \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \mathbf{z}) &\longmapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ \mathcal{G}_p(t, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction \mathbf{y} définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}_p(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.17)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2 \quad (1.18)$$

avec $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix}$. ■

Dans de nombreux cas, la variable t représente le temps et les composantes du vecteur \mathbf{y} , une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation différentielle (1.17) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré.

En général, il est impossible de trouver des solutions exactes à ces problèmes. Il faut alors construire des méthodes numériques pour obtenir des

solutions approchées. Toutefois, il faudra vérifier l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela, on a le

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $(t^0, \mathbf{y}^{[0]}) \in U$.

Théorème 1.5 - Cauchy-Lipschitz

On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue sur U et quelle est localement lipschitzienne en $\mathbf{y} : \forall (t, \mathbf{y}) \in U, \exists \mathcal{W}$ voisinage $t, \exists \mathcal{V}$ voisinage $\mathbf{y}, \exists L > 0$ tels que

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (1.19)$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy (\mathcal{PC}) admet une unique solution.

Proposition 1.6 Si $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$ est continue et bornée, alors \mathbf{f} satisfait la condition de Lipschitz (1.19) en \mathbf{y} . ■

1.4 Dérivation numérique

Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 et $t \in [a, b]$. La dérivée $y'(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} \end{aligned}$$

Définition 1.7

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation régulière de $[a, b]$ à N pas ou $N + 1$ points** l'ensemble des points $a + nh, n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ où le pas h est donné par $h = (b - a)/N$.

Soient $\{t^n\}_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ une discrétisation régulière de $[a, b]$ et $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (1.20)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (1.21)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (1.22)$$

Pour calculer l'erreur commise par ces approximations, on rappelle le développement de Taylor

Proposition 1.8 - Développement de Taylor

Soit f une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ alors

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ il existe un $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x-y)^{r+1} \quad (1.23)$$

- $\forall x \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x+h \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$ tel quel

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} h^{r+1} \quad (1.24)$$

Définition 1.9

Soit g une fonction. On dit que g **se comporte comme un grand O de h^q** quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$|g(h)| \leq Ch^q, \quad \forall h \in]-H, H[.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.

Avec cette notation le développement de Taylor (1.24) s'écrit aussi

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \mathcal{O}(h^{r+1}). \quad (1.25)$$

Exercice 1.1 Q. 1 Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leq C_1 h, \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leq C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

Q. 2 Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leq E h^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

Définition 1.10 La différence $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est appelée **erreur de troncature au point t^n** . On dira que $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est d'ordre $p > 0$ si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n| \leq C h^p \iff |y'(t^n) - (Dy)_n| = \mathcal{O}(h^p).$$

Les erreurs de troncature des différences finies progressive et rétrograde sont d'ordre 1 et l'erreur de troncature de la différence finie centrée est d'ordre 2.

On a démontré que

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (1.26)$$

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (1.27)$$

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} \right| = \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket. \quad (1.28)$$

Exercice 1.2 Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation régulière de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $\mathbf{F}_n = f(t^n)$.

Q. 1 1. Connaissant uniquement le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\mathbf{V}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h).$$

2. *Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent.* ■

- Q. 2** 1. *Connaissant uniquement le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\mathbf{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2).$$

2. *Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{W} précédent.* ■

1.5 Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension $d = 1$

On veut résoudre numériquement le problème de Cauchy (1.13)-(1.14) en utilisant les différences finies progressive, rétrograde ou centrée.

On note $t^n = t^0 + nh$, $n \in \{0, \dots, N\}$ une **discrétisation régulière de** $[t^0, t^0 + T]$ avec $h = T/N$ le **pas de temps**. On a

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

ce qui entraîne

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (1.29)$$

En utilisant la formule des différences finies progressive, on a $\forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, $\exists \eta_n \in [t^n, t^{n+1}]$ tels que

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} y''(\eta_n)$$

ou encore

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y''(\eta_n).$$

On note $y^{[n]}$ une approximation de $y(t^n)$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (1.30)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $y^{[n+1]}$ en fonction de $y^{[n]}$.

De la même manière, la méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (1.31)$$

Ce schéma est **implicite**, car $y^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $y^{[n]}$. Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

Exercice 1.3 On veut résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}) suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) = \cos(t) + 1, & \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} \quad \text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n]}$ et la fonction y , ... ■

Q. 2 (algorithmique) Soit $a, b, a < b$ deux réels. Ecrire une fonction DIS-REG retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation. ■

Q. 3 (algorithmique) Ecrire une fonction REDEP retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif. ■

Q. 4 (algorithmique) Ecrire un algorithme complet de résolution de (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif. ■

1.6 Exemple

Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 y^2(t), & \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

de solution exacte

$$y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2).$$

Les résolutions numériques avec les schémas d'Euler progressif et rétrograde sont représentés en figure 1.

1.7 Stabilité

Pour illustrer la notion de stabilité (absolue) d'un schéma numérique, on étudie le problème modèle suivant :

Soit $\lambda < 0$, Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

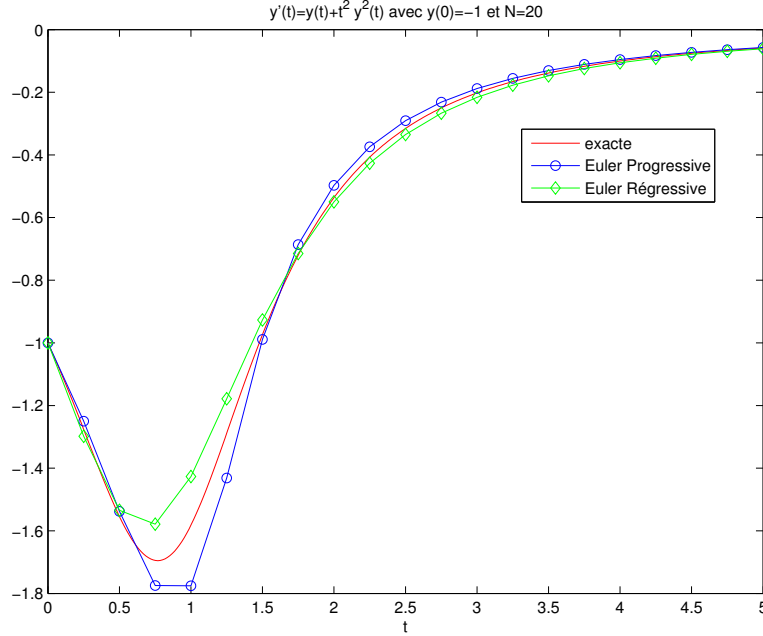


FIGURE 1 – résolutions avec Euler progressif et rétrograde

où $\lambda < 0$ est donné. La solution exacte est

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

En particulier, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

Définition 1.11 On pose $t^n = nh$, où le pas de temps $h > 0$ est donné et $y^{[n]}$ une approximation de $y(t^n)$ par un schéma donné. On dit alors que le schéma associé à ce problème est absolument stable si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y^{[n]} = 0.$$

Ce n'est malheureusement pas toujours le cas comme illustré en figure2 avec le schéma d'Euler progressif et $h = \frac{20}{19} \approx 1.05$. Par contre, avec $h = \frac{20}{21} \approx 0.95$, le même schéma est stable (voir figure3).

Pour comprendre ce phénomène, on écrit le schéma d'Euler progressif :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}) = y^{[n]} + \lambda h y^{[n]} = (1 + \lambda h) y^{[n]}$$

d'où

$$y^{[n]} = (1 + \lambda h)^n y^{[0]}, \quad \forall n \geq 0.$$

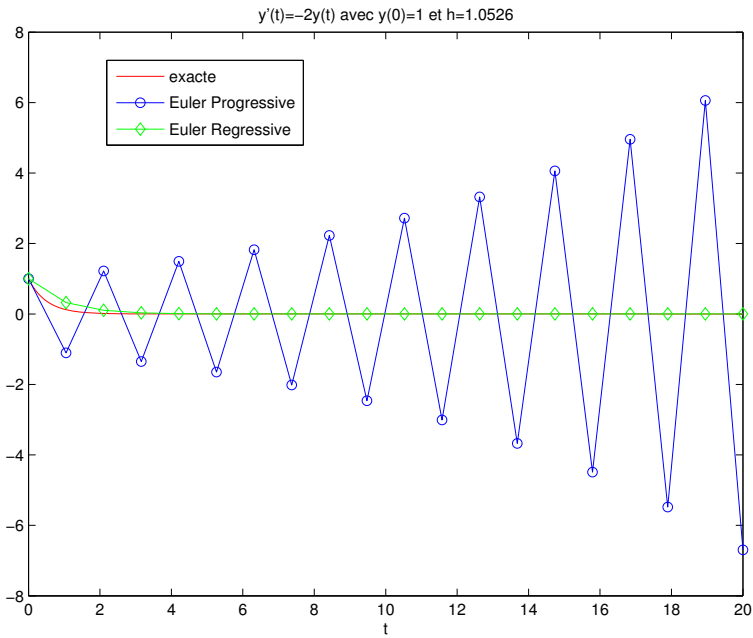


FIGURE 2 – Instabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde

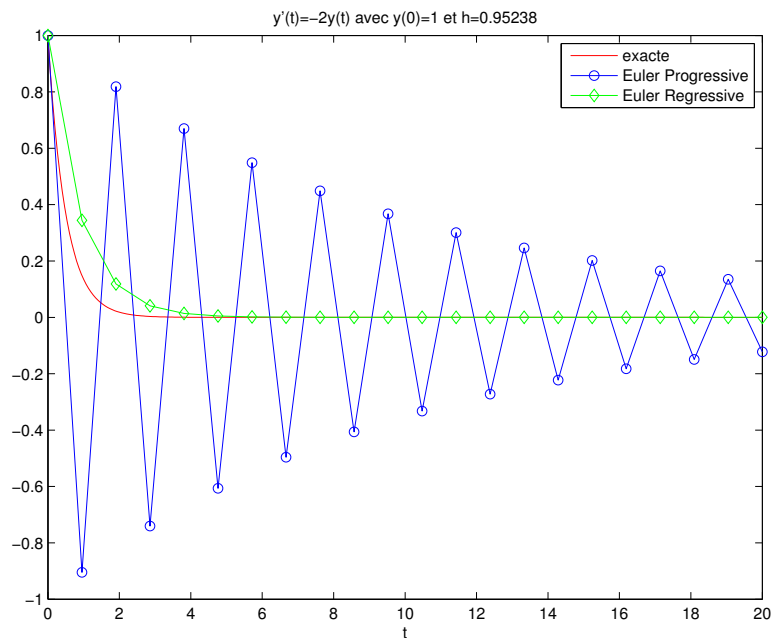


FIGURE 3 – Stabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde

On remarque alors que si $|1 + \lambda h| > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^{[n]}| = +\infty$, le schéma d'Euler progressif est alors instable. Pour assurer la stabilité, il faut ici imposer une condition sur h :

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \text{d'où} \quad 0 < h < -\frac{2}{\lambda}.$$

On dit alors que le schéma d'Euler progressif est **conditionnellement stable**.

De la même manière, pour le schéma d'Euler rétrograde on obtient

$$y^{[n+1]} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right) y^{[n]} =$$

et donc

$$y^{[n]} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right)^n y^{[0]}, \quad \forall n \geq 0.$$

Dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} y^{[n]} = 0$ sans condition : on dit que le schéma d'Euler rétrograde est **inconditionnellement stable**.

1.8 Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension d

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

La fonction \mathbf{f} étant définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, \mathbf{z}) &\longmapsto \mathbf{w} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{z}) \\ \vdots \\ f_d(t, \mathbf{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{y}(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, \mathbf{y}(t)) \end{pmatrix}$$

le problème de Cauchy peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, \mathbf{y}(t)), \\ \vdots & \\ y_d'(t) &= f_d(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \text{avec} & \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Après discrétisation et utilisation de la formule des différences finies progressive on obtient

$$\begin{cases} y_1^{[n+1]} &= y_1^{[n]} + hf_1(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \vdots & \\ y_d^{[n+1]} &= y_d^{[n]} + hf_d(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \text{avec} & \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

où $\mathbf{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_d^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}^{[n]} \approx \mathbf{y}(t^n)$.

On obtient alors la méthode d'**Euler progressive** sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (1.32)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $\mathbf{y}^{[n+1]}$ en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

De la même manière, la méthode d'**Euler régressive** sous forme vectorielle est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (1.33)$$

Ce schéma est **implicite**, car $\mathbf{y}^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

2 Méthode à un pas ou à pas séparés

Pour simplifier on prend $h = h_n$ (pas constant)

2.1 Schéma général

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (2.1)$$

Pour la méthode d'Euler, la fonction $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$ est $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

2.2 Convergence

La méthode converge sur l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ si, pour la suite des $\mathbf{y}^{[n]}$ calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas h diminue :

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n)\| = 0$$

2.3 Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur $\mathbf{y}^{[0]}$ ou Φ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas h .

Souvent, lorsque la méthode n'est pas stable, l'amplification des erreurs est exponentielle et, au bout de quelques calculs, les résultats entraînent des dépassements de capacité.

Théorème 2.1 *Si $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$ vérifie la condition de Lipschitz en \mathbf{y} alors la méthode est stable.* ■

2.4 Consistance

Le schéma de calcul (2.1) est consistant avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Théorème 2.2 *Le schéma est consistant si $\Phi(t, \mathbf{y}, 0) = f(t, \mathbf{y})$.* ■

Théorème 2.3 *Si la méthode est stable et consistante, alors elle converge pour n'importe quelle valeur initiale.* ■

2.5 Ordre

La méthode itérative est d'ordre p si pour toute solution :

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| \leq Ch^p$$

3 Méthode de Runge-Kutta

3.1 Principe

Pour simplifier, on suppose $h_n = h$. L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation (??) sur $[t^n, t^{n+1}]$ et de calculer :

$$\mathbf{y}(t^{n+1}) = \mathbf{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à q points intermédiaires $t^{n,i+1} = t^n + h_i$ pour calculer l'intégrale.

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3.1)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$

Remarque 3.1 1. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{i,j}.$$

2. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

3. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

4. Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice \mathbb{B} est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad j \geq i, \quad b_{i,j} = 0.$$

5. Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si f est contractante en \mathbf{y} . ■

3.2 Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad (3.2)$$

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = (1 - \alpha)\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{y} + \frac{h}{2\alpha}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\right)$$

- Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient la **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

- Avec $\alpha = 1$, on obtient la **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Exercice 3.1 la *méthode de Heun* est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDHEUNVEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de \mathbf{f} . ■

Pour des valeurs plus élevées de p , ces méthodes sont plus précises que la méthode d'Euler, et d'autant plus que p augmente. On se limite dans la pratique à $p = 4$. Cette méthode est connue sous le nom de *Runge-Kutta 4*. Remarquons que dans ces méthodes le pas peut être adapté à chaque étape.

3.3 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (3.3)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Exercice 3.2 la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDRK4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4). ■

4 Méthodes à pas multiples

4.1 Exemple : schéma de point milieu

Considérons la méthode à deux pas définie par la récurrence :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + 2h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}). \quad (4.1)$$

Cette méthode est d'ordre 2.

De manière évidente, ces méthodes à pas multiples posent des problèmes de démarrage : ici, on ne peut calculer directement $\mathbf{y}^{[1]}$. Les premières valeurs doivent être calculées par un autre schéma.

4.2 Le principe

Dans tous les schémas présentés, la valeur de $\mathbf{y}^{[n+1]}$ était déterminée à chaque pas de façon explicite en fonction uniquement du point $\mathbf{y}^{[n]}$. On peut tenir compte de plusieurs valeurs $\mathbf{y}^{[i]}$ précédemment calculées et ainsi travailler sur un nombre de pas multiples.

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale :

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(t^{n+i}, \mathbf{y}^{[n+i]}) \quad (4.2)$$

où k est le nombre de pas, $\alpha_k \neq 0$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.

Remarque 4.1 Si $\beta_k = 0$ le schéma est explicite, sinon il est implicite. ■

Définition 4.2 (ordre) Soit y la solution du problème de Cauchy (1.13)-1.14 et $\mathbf{y}^{[n+k]}$ la valeur obtenue par le schéma (4.2) en prenant $\mathbf{y}^{[n+i]} = \mathbf{y}(t^{n+i})$, $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \mathbf{y}(t^{n+k}) - \mathbf{y}^{[n+k]}.$$

Le schéma (4.2) est d'ordre p si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Théorème 4.3 *Un schéma à pas multiple de type (4.2) est d'ordre p si et seulement si*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket. \end{aligned}$$

Propriété 4.4 (Stabilité) *Soit P le polynôme défini par $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i$.*

*Une méthode à pas multiple est **stable**, si*

1. *toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1,*
2. *une racine de module égal à 1 est une racine simple de P .* ■

Pour le schéma (4.1), on a $k = 2$ et

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $P(\lambda) = -1 + \lambda^2 = (\lambda+1)(\lambda-1)$: le schéma (4.1) est stable.

Théorème 4.5 (Convergence) *On suppose que les k valeurs initiales vérifient,*

$$\|\mathbf{y}(t^i) - \mathbf{y}^{[i]}\| \leq C_0 h^p, \quad \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Si le schéma (4.2) est d'ordre p et stable, alors il est convergent d'ordre p :

$$\|\mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]}\| \leq C h^p, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Pour obtenir, à partir d'un schéma à k pas, un schéma d'ordre p il faut obligatoirement initialiser les k premières valeurs à l'aide d'un schéma d'ordre p au moins.

4.3 Méthodes d'Adams-Bashforth

On note $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left(3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right). \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left(23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]} \right). \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \quad (4.5)$$

Ces schémas sont **explicites** et leur ordre correspond au nombre de pas.

Exercice 4.1 La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right).$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDAB4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode. ■

4.4 Méthodes d'Adams-Moulton

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left(\mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]} \right). \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left(5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right). \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right). \quad (4.8)$$

Ces schémas sont **implicites** et leur ordre correspond au nombre de pas plus un.

4.5 Schéma prédicteur-correcteur

4.5.1 Principe

Il s'agit là d'une des méthodes les plus employées. Une méthode de prédiction-correction procède en deux temps : on fournit explicitement une valeur approchée de la solution au $n^{\text{ième}}$ pas (soit $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$), puis on calcule la valeur correspondante de \mathbf{f} (soit $\bar{\mathbf{f}}^{[n+1]}$) et enfin, on substitue cette valeur dans un schéma implicite (on obtient alors une valeur *corrigée*).

pour n variant de 0 à $N - 1$ faire
 Calculer une valeur approchée $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$ par un schéma explicite ;
 Evaluer $\bar{\mathbf{f}}^{[n+1]} = \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]})$;
 $\mathbf{y}^{[n+1]}$ à l'aide d'un schéma implicite en remplaçant l'inconnue par $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$);
 finpour

4.5.2 Exemple

Choisissons la méthode d'Euler explicite pour prédicteur et la méthode implicite des trapèzes comme correcteur.

Euler explicite : $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

Trapèze implicite : $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}))$

On obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}); \\ \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}^{[n]}; \\ \bar{\mathbf{f}}^{[n+1]} &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}); \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]}) \end{cases}$$

Remarque 4.6 On retrouve ici, pour ce cas simple, une formule de Runge-Kutta 2. ■

En pratique, on peut utiliser un schéma d'Adams explicite (??) pour la prédiction et un autre implicite (??) pour la correction.

Exercice 4.2 On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]})$$

et la méthode de Adams-Moulton d'ordre 4 implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]})$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDPRECOR4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-corrrection utilisant ces deux schémas. ■

Remarque 4.7 1. La stabilité du prédicteur intervient peu.

2. Le choix du pas dans ces méthodes est un problème difficile. ■

4.5.3 Comparaison avec Runge-Kutta

L'intérêt d'une méthode de résolution numérique d'équations différentielles se mesure principalement suivant deux critères :

- son coût pour obtenir une précision donnée (c'est à dire le nombre d'évaluations de fonctions par étapes).
- sa stabilité.

La caractéristique des méthodes de Runge-Kutta est que le pas est assez facile à adapter, la mise en oeuvre informatique plus aisée. Mais pour des méthodes du même ordre de consistance, les méthodes de Runge-Kutta exigent plus d'évaluations de fonctions. Quand on sait que la solution de l'équation n'est pas sujette à de brusques variations de la dérivée, on prendra une méthode de type prédicteur-correcteur mais, si le pas doit être adapté plus précisément, on préférera une méthode de Runge-Kutta.

5 Exercices corrigés

EXERCICE 1

Q. 1 Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2}y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2}y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leq C_1 h, \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^R| \leq C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

Q. 2 Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leq E h^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

Correction

Q. 1 1. Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, on a

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ tel que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(\eta_P^n) \quad (5.1)$$

d'où

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2!}y^{(2)}(\eta_P^n). \quad (5.2)$$

On a

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^{n-1}) = y(t^n) - hy^{(1)}(t^n) + \frac{(-h)^2}{2!}y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (5.3)$$

d'où

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2}y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (5.4)$$

2. Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, comme $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (5.2),

$$|(Dy)_n^P - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2}|y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (5.4),

$$|(Dy)_n^R - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2}|y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|.$$

Q. 2 1. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(t^n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\eta_1^n) \quad (5.5)$$

et

$$y(t^{n-1}) = y(t^n) - hy^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(t^n) - \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\eta_2^n) \quad (5.6)$$

En soustrayant (5.6) à (5.5), on obtient

$$y(t^{n+1}) - y(t^{n-1}) = 2hy^{(1)}(t^n) + \frac{h^3}{6}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

d'où

$$y^{(1)}(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} - \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n)).$$

2. Comme $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$, on en déduit que

$$|y^{(3)}(\eta_1^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(3)}(\eta_2^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

◇

EXERCICE 2

On veut résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}) suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n]}$ et la fonction y , ... ■

Q. 2 (algorithmique) Soit a, b , $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction DIS-REG retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation. ■

Q. 3 (algorithmique) Ecrire une fonction REDEP retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif. ■

Q. 4 (algorithmique) Ecrire un algorithme complet de résolution de (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif. ■

Correction

Q. 1 On commence par écrire le problème de Cauchy associé à (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

avec $t^0 = 0$, $T = 4\pi$, $y_0 = 0$ et

$$f : \begin{array}{l} [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, z) \qquad \qquad \qquad \longmapsto \cos(t) + 1 \end{array} .$$

Les données du problème de Cauchy sont donc les réels t^0 , T , y_0 et la fonction f . L'inconnue est la fonction $y : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy, on utilise le schéma (\mathcal{S}) où les données sont celles du problème de Cauchy plus le nombre de discrétisations $N \in \mathbb{N}^*$. On peut alors calculer

- t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ qui sont les points de la discrétisation régulière à N intervalles :

$$t^n = t^0 + nh, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \text{avec } h = \frac{T}{N}.$$

- $y^{[n]}$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ déterminés par le schéma (\mathcal{S}) . On a $y^{[0]} = y^0$, puis on calcule

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } N - 1$$

Q. 2 Une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas (constant) de discrétisation est donnée par

$$t^n = a + nh, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \text{avec } h = \frac{b - a}{N}.$$

Algorithme 1 Fonction DISREG retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$

Données : a, b : deux réels, $a < b$
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1}

```

1: Fonction  $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(a, b, N)$ 
2:    $h \leftarrow (b - a) / N$ 
3:   Pour  $n \leftarrow 0$  à  $N$  faire
4:      $\mathbf{t}(n + 1) \leftarrow a + n * h$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

Q. 3 L'algorithme de la fonction REDEP est :

Algorithme 2 Fonction REDEP : résolution d'un problème de Cauchy scalaire par le schéma d'Euler progressif

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 y^0 : réel, donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$
 \mathbf{Y} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{Y}(n) = y^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDEP}(f, t^0, T, y^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a) / N$ 
4:    $\mathbf{Y}(1) \leftarrow y^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{Y}(n + 1) \leftarrow \mathbf{Y}(n) + h * f(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(n))$ 
7:   Fin Pour
8: Fin Fonction

```

Q. 4 Il faut tout d'abord écrire la fonction FCAUCHY correspondant à la fonction f :

Algorithme 3 Fonction FCAUCHY : fonction f du problème de Cauchy associé à (\mathcal{P})

Données : t : un réel
 z : un réel

Résultat : w : un réel

- 1: **Fonction** $w \leftarrow \text{FCAUCHY}(t, y)$
 - 2: $w \leftarrow \cos(t) + 1$
 - 3: **Fin Fonction**
-

L'algorithme de résolution est :

Algorithme 4 résolution numérique du problème (\mathcal{P})

- 1: $t^0 \leftarrow 0$
 - 2: $T \leftarrow 4\pi$
 - 3: $y^0 \leftarrow 0$
 - 4: $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDEP}(\text{FCAUCHY}, t^0, T, y^0, 500)$ ■
-

◇

EXERCICE 3

On veut résoudre numériquement le problème du pendule pesant sans viscosité :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \theta^{(2)}(t) &= \frac{g}{L} \sin(\theta(t)), \quad \forall t \in [0, 100] \\ \theta(0) &= \pi \\ \theta^{(1)}(0) &= 1 \end{cases}$$

avec $g = 9.81$ et $L = 1$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif (vectoriel) pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ \mathbf{y}^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $\mathbf{y}^{[n]}$ et la fonction \mathbf{y} , ... ■

On suppose par la suite le fonction DISREG retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles déjà écrite.

Q. 2 (algorithmique) Ecrire une fonction REDEPVEC retournant l'ensemble des couples $(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif. ■

Q. 3 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution d (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif.* ■

Correction

Q. 1 On a déjà écrit le problème de cauchy associé à (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

avec $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta^{(1)}(t) \end{pmatrix}$, $t^0 = 0$, $T = 100$, $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \mathbf{z}) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{z}_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(\mathbf{z}_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les données du problème de Cauchy sont donc les réels t^0 , T , le vecteur $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ et la fonction \mathbf{f} . L'inconnue est la fonction $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy, on utilise le schéma (\mathcal{S}) où les données sont celles du problème de Cauchy plus le nombre de discrétisations $N \in \mathbb{N}^*$. On peut alors calculer

- t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ qui sont les points de la discrétisation régulière à N intervalles :

$$t^n = t^0 + nh, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \text{avec } h = \frac{T}{N}.$$

- $\mathbf{y}^{[n]}$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ déterminés par le schéma (\mathcal{S}). On a $\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}^0$, puis on calcule

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } N - 1$$

Q. 2 L'algorithme de la fonction REDEPVEC est :

Algorithme 5 Fonction REDEPVEC : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma d'Euler progressif

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 \mathbf{y}^0 : un vecteur de \mathbb{R}^d , donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$
 \mathbf{Y} : matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$,
 $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDEPVEC}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + h * \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
7:   Fin Pour
8: Fin Fonction

```

Q. 3 Il faut tout d'abord écrire la fonction FP correspondant à la fonction f :

Algorithme 6 Fonction FP : fonction f du problème de Cauchy associé à (\mathcal{P})

Données : t : un réel
 \mathbf{z} : un vecteur de \mathbb{R}^2 ,
Résultat : \mathbf{w} : un vecteur de \mathbb{R}^2

```

1: Fonction  $\mathbf{w} \leftarrow \text{FP}(t, \mathbf{z})$ 
2:    $g \leftarrow 9.81$ 
3:    $L \leftarrow 1$ 
4:    $\mathbf{w}(1) \leftarrow \mathbf{z}(2)$ 
5:    $\mathbf{w}(2) \leftarrow -(g/L) * \sin(\mathbf{z}(1))$ 
6: Fin Fonction

```

L'algorithme de résolution est :

Algorithme 7 résolution numérique du problème (\mathcal{P})

-
- 1: $t^0 \leftarrow 0$
 - 2: $T \leftarrow 100$
 - 3: $\mathbf{y}^0 \leftarrow \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$
 - 4: $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDEPVEC}(\text{FP}, t^0, T, \mathbf{y}^0, 2000)$
 - 5: $\text{PLOT}(\mathbf{t}, \mathbf{Y}(1, :)) \quad \triangleright \text{Représentation de } (t, \theta(t))$
 - 6: $\text{PLOT}(\mathbf{t}, \mathbf{Y}(2, :)) \quad \triangleright \text{Représentation de } (t, \theta'(t)) \quad \blacksquare$
-

◇

EXERCICE 4

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})).$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique REDHEUNVEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de \mathbf{f} .* ■

Correction

Q. 1 Le schéma de Heun peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (\mathbf{k}_1^n + \mathbf{k}_2^n)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^n &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^n &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_1) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction REDEPVEC s'écrit alors :

Algorithme 8 Fonction REDEPVEC : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de Heun

Données : \mathbf{f} : $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 \mathbf{y}^0 : un vecteur de \mathbb{R}^d , donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$
 \mathbf{Y} : matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

1: **Fonction** $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDHEUNVEC}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$
2: $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(t^0, t^0 + T, N)$
3: $h \leftarrow (b - a)/N$
4: $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$
5: **Pour** $n \leftarrow 1$ à N **faire**
6: $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$
7: $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n+1), \mathbf{Y}(:, n) + h\mathbf{k}_1)$
8: $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/2) * (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$
9: **Fin Pour**
10: **Fin Fonction**

◇

EXERCICE 5

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique REDRK4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4).* ■

Correction

Q. 1 L'algorithme de la fonction REDRK4VEC s'écrit alors :

Algorithme 9 Fonction REDRK4VEC : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de RK4

Données : \mathbf{f} : $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)

t^0 : réel, temps initial

T : réel > 0

\mathbf{y}^0 : un vecteur de \mathbb{R}^d , donnée initiale

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

\mathbf{Y} : matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDRK4VEC}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $\mathbf{Y}(:, 1) \leftarrow \mathbf{y}^0$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à  $N$  faire
6:      $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
7:      $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_1)$ 
8:      $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h/2, \mathbf{Y}(:, n) + (h/2)\mathbf{k}_2)$ 
9:      $\mathbf{k}_4 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{t}(n) + h, \mathbf{Y}(:, n) + h\mathbf{k}_3)$ 
10:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/6) * (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ 
11:   Fin Pour
12: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 6

La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right).$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDAB4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode. ■

Correction

Q. 1 On utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser les 4 premières valeurs.

L'algorithme de la fonction REDAB4VEC s'écrit alors :

Algorithme 10 Fonction REDAB4VEC : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 \mathbf{y}^0 : un vecteur de \mathbb{R}^d , donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$
 \mathbf{Y} : matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] \leftarrow \text{REDAB4VEC}(f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N)$ 
2:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{DISREG}(t^0, t^0 + T, N)$ 
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $[\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK4VEC}(f, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3)$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:      $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow f(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow f(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:   $\mathbf{k}_3 \leftarrow f(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11:  Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:     $\mathbf{k}_0 \leftarrow f(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:     $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2$ 
15:     $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1$ 
16:     $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
17:  Fin Pour
18: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 7

On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la méthode de Adams-Moulton d'ordre 4 implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique REDPRECOR4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas.* ■

Correction

Q. 1 On utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour initialiser les 4 premières valeurs.

Ensuite on utilise comme prédicteur le schéma explicite et comme correcteur le schéma implicite. Le principe est donc

— Calcul à l'aide du prédicteur :

$$\hat{\mathbf{y}}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

— Calcul à l'aide du correcteur :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^{[n+1]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\hat{\mathbf{f}}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right) \end{aligned}$$

L'algorithme de la fonction REDPRECOR4VEC s'écrit alors :

Algorithme 11 Fonction REDPreCor4Vec : résolution d'un problème de Cauchy par prédiction-correction (Adams-Bashforth/Adams-Moulton) d'ordre 4

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
 t^0 : réel, temps initial
 T : réel > 0
 \mathbf{y}^0 : un vecteur de \mathbb{R}^d , donnée initiale
 N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$
 \mathbf{Y} : matrice réelle de dimension $d \times (N+1)$, $\mathbf{Y}(:, n) = \mathbf{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

```

1: Fonction [ $\mathbf{t}, \mathbf{Y}$ ]  $\leftarrow$  REDPRECOR4VEC( $f, t^0, T, \mathbf{y}^0, N$ )
2:    $\mathbf{t} \leftarrow$  DISREG( $t^0, t^0 + T, N$ )
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:   [ $\mathbf{t}_{ini}, \mathbf{Y}_{ini}$ ]  $\leftarrow$  REDRK4VEC( $f, t^0, t^0 + 3 * h, \mathbf{y}^0, 3$ )
5:   Pour  $n \leftarrow 1$  à 4 faire
6:      $\mathbf{Y}(:, n) \leftarrow \mathbf{Y}_{ini}(:, n)$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{k}_1 \leftarrow f(\mathbf{t}(3), \mathbf{Y}(:, 3))$ 
9:    $\mathbf{k}_2 \leftarrow f(\mathbf{t}(2), \mathbf{Y}(:, 2))$ 
10:   $\mathbf{k}_3 \leftarrow f(\mathbf{t}(1), \mathbf{Y}(:, 1))$ 
11:  Pour  $n \leftarrow 4$  à  $N$  faire
12:     $\mathbf{k}_0 \leftarrow f(\mathbf{t}(n), \mathbf{Y}(:, n))$ 
13:     $\hat{\mathbf{Y}} \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (55 * \mathbf{k}_0 - 59 * \mathbf{k}_1 + 37 * \mathbf{k}_2 - 9 * \mathbf{k}_3)$ 
14:     $\hat{\mathbf{F}} \leftarrow f(\mathbf{t}(n+1), \hat{\mathbf{Y}})$ 
15:     $\mathbf{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbf{Y}(:, n) + (h/24) * (9 * \hat{\mathbf{F}} + 19 * \mathbf{k}_0 - 5 * \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ 
16:     $\mathbf{k}_3 \leftarrow \mathbf{k}_2$ 
17:     $\mathbf{k}_2 \leftarrow \mathbf{k}_1$ 
18:     $\mathbf{k}_1 \leftarrow \mathbf{k}_0$ 
19:  Fin Pour
20: Fin Fonction

```

◇

Liste des bclogo

Définition 1.3 - problème de Cauchy, *page 10*

Théorème 1.5 - Cauchy-Lipschitz, *page 12*

Définition 1.7, *page 12*

Proposition 1.8 - Développement de Taylor, *page 13*

Définition 1.9, *page 13*