

# E.D.O. : méthodes numériques (cours 1 et 2)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

5 janvier 2015

# Plan

## 1 Introduction

### ● Exemples

- Météorologie
- Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
- Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

Le couplage Océan-Atmosphère est décrit par un système d'E.D.P. couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

Le **modèle de Lorentz** est une version très simplifiée de ces équations pour l'étude du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard :

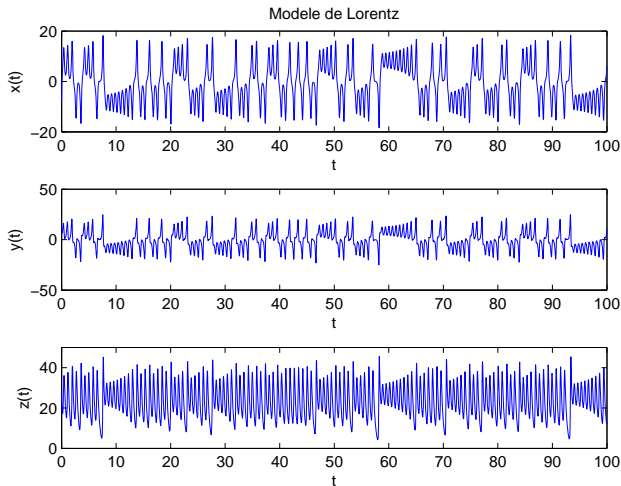
$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (1)$$

où

- $x(t)$  : proportionnel à l'intensité du mouvement de convection,
- $y(t)$  : proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants,
- $z(t)$  : proportionnel à une variation de température

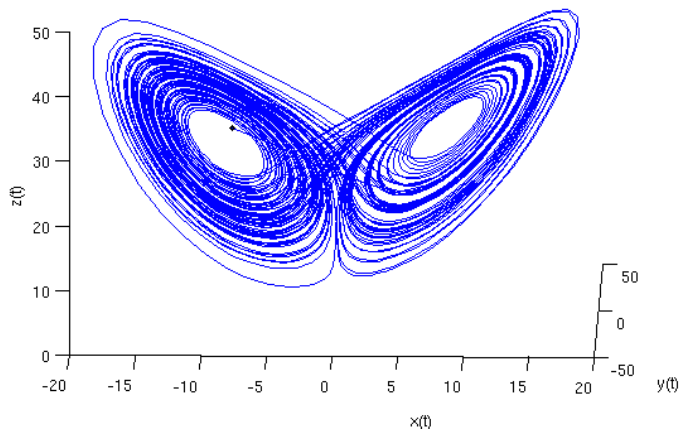
# Modèle de Lorentz

Avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  et les données initiales  $x(0) = -8$ ,  $y(0) = 8$  et  $z(0) = \rho - 1$ .



# Modèle de Lorentz : papillon

Modele de Lorentz



# Modèle du Bruxelator

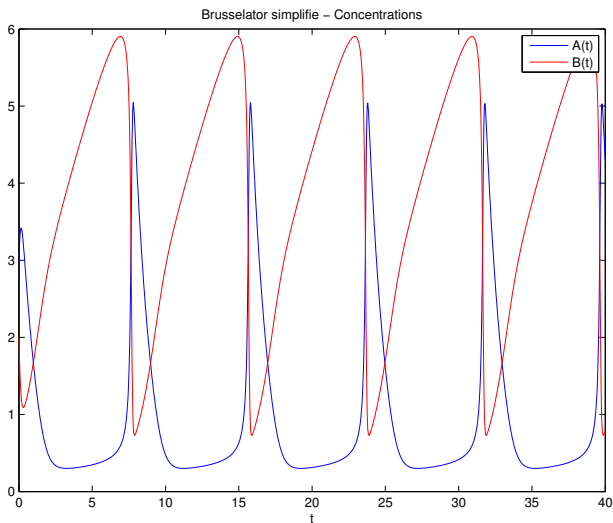
Une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique mélangée à une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entraîner, sous certaines conditions, une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleu avec une période de 7 secondes.

Le modèle associé est nommé **modèle du bruxelator**. Sous certaines hypothèses, le modèle simplifié peut s'écrire :

$$\begin{cases} A'(t) &= 1 + \alpha A^2(t)B(t) - (\beta + 1)A(t) \\ B'(t) &= -\alpha A^2(t)B(t) + \beta A(t) \end{cases} \quad (2)$$

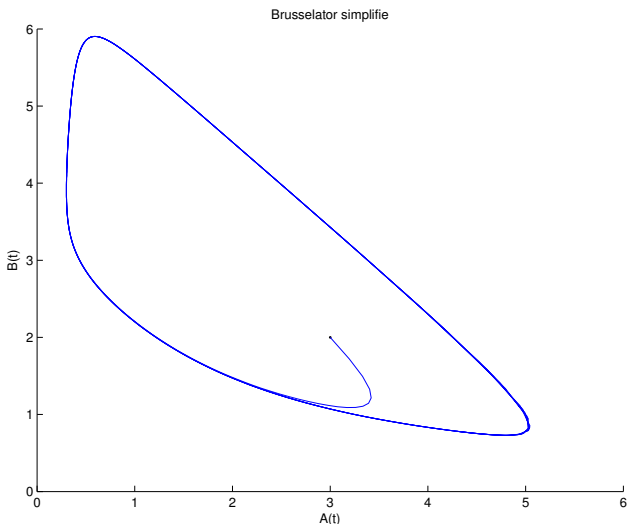
# Modèle du Brusselator

Avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3.5$  et les C.I.  $A(0) = 3$  et  $B(0) = 2$  :



# Modèle du Brusselator

Avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3.5$  et les C.I.  $A(0) = 3$  et  $B(0) = 2$  :

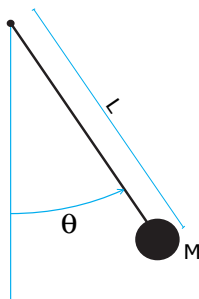


## Pendule pesant sans viscosité

Le pendule pesant : objet pesant accroché à une tige de masse négligeable, l'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule.

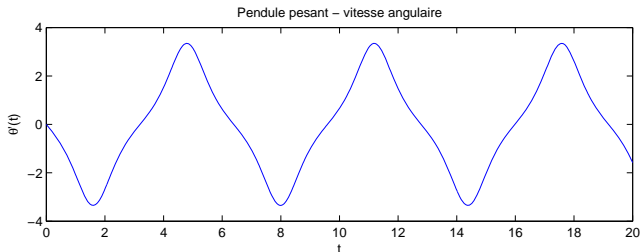
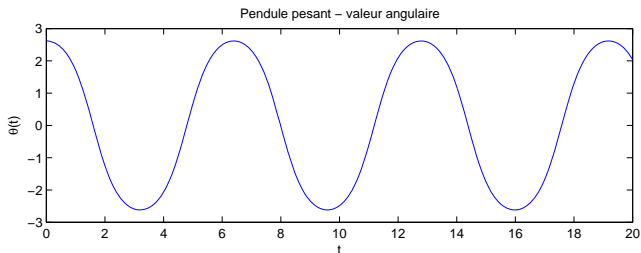
$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (3)$$

où  $\theta(t)$  est l'angle que fait, à l'instant  $t$ , le pendule par rapport à l'axe vertical,  $L$  la longueur de la tige.



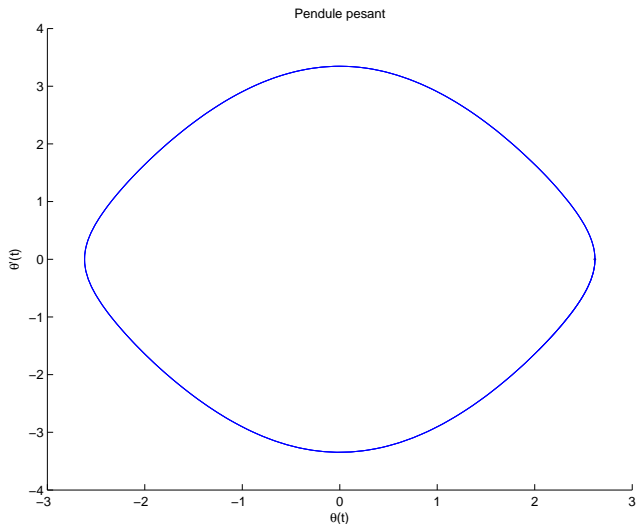
# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  et les C.I.  $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\theta'_0 = 0$  :



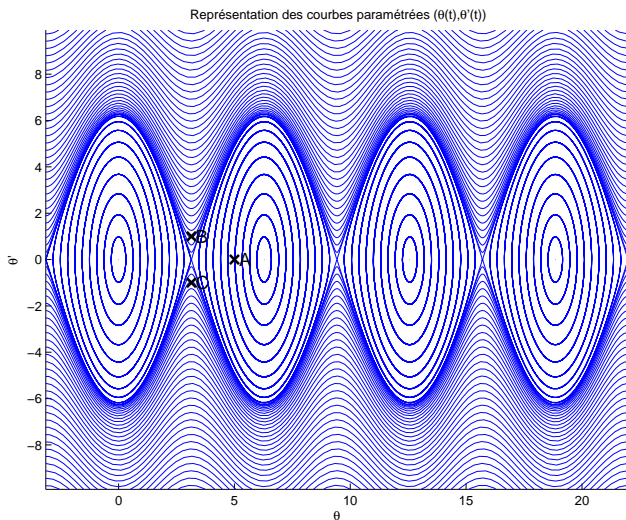
# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  et les C.I.  $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\theta'_0 = 0$  :



# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  :



# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

Soit une fonction  $\mathbf{y}$  définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^p$  (continûment dérivable d'ordre  $p$ ) et on note  $\mathbf{y}^{(p)}$  la dérivée d'ordre  $p$  de  $\mathbf{y}$ .

## Définition

On appelle *équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre  $p$*  une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

## Définition

On appelle *forme canonique d'une E.D.O.* une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (4)$$

## Proposition

Toute équation différentielle d'ordre  $p$  sous forme canonique peut s'écrire comme un système de  $p$  équations différentielles d'ordre 1.

# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- **Formulation générale : le problème de Cauchy**
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

## Définition (problème de Cauchy)

Soit  $\mathbf{f}$  l'application continue définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec  $T \in ]0, +\infty]$ . Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction  $\mathbf{y}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (5)$$

$$(c) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

## Exercice

*Quelles sont les données du problème de Cauchy ?*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (6)$$

$$(c) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

## Exercice

Quelles sont les données du problème de Cauchy ?

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (6)$$

- $t^0 \in \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$
- la fonction  $\mathbf{f}$
- le vecteur  $\mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m$

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Bruxelator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} A'(t) &= 1 + \alpha A^2(t)B(t) - (\beta + 1)A(t) \\ B'(t) &= -\alpha A^2(t)B(t) + \beta A(t) \end{cases}$$

avec C.I.  $A(0) = A_0$  et  $B(0) = A_0$ .

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} A'(t) &= 1 + \alpha A^2(t)B(t) - (\beta + 1)A(t) \\ B'(t) &= -\alpha A^2(t)B(t) + \beta A(t) \end{cases}$$

avec C.I.  $A(0) = A_0$  et  $B(0) = A_0$ .

- On pose  $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  avec  $y_1(t) = A(t)$  et  $y_2(t) = B(t)$ .

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Bruxelator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} A'(t) &= 1 + \alpha A^2(t)B(t) - (\beta + 1)A(t) \\ B'(t) &= -\alpha A^2(t)B(t) + \beta A(t) \end{cases}$$

avec C.I.  $A(0) = A_0$  et  $B(0) = A_0$ .

- On pose  $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  avec  $y_1(t) = A(t)$  et  $y_2(t) = B(t)$ .
- On pose  $\mathbf{f}_b(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha z_1^2 z_2 - (\beta + 1)z_1 \\ -\alpha z_1^2 z_2 + \beta z_1 \end{pmatrix}$ . et  $\mathbf{y}^{[0]} = (A_0, B_0)^t$
- 

$$(\mathcal{C}_B) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}_b(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I.  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \theta'_0$ .

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I.  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \theta'_0$ .

- On pose  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$  avec  $y_1(t) = \theta(t)$  et  $y_2(t) = \theta'(t)$ .

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I.  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \theta'_0$ .

- On pose  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$  avec  $y_1(t) = \theta(t)$  et  $y_2(t) = \theta'(t)$ .

- 

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ \theta^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{L} \sin(y_1(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I.  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \theta'_0$ .

- On pose  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$  avec  $y_1(t) = \theta(t)$  et  $y_2(t) = \theta'(t)$ .

- 

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ \theta^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(t) \\ -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{L} \sin(y_1(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- On pose  $\mathbf{f}_p(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(z_1) \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{y}^{[0]} = (\theta_0, \theta'_0)^t$

- 

$$(\mathcal{C}_P) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}_p(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = 3v - 3t$  et une solution  $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$ .

- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = 3v - 3t$  et une solution  $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$ .

- Problème **non-linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$  et **trois solutions**  $y(t) = 0$ ,  $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$  et  $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$ .

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec  $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $(t^0, \mathbf{y}^{[0]}) \in U$ .

## Theorem (Cauchy-Lipschitz)

*On suppose que la fonction  $\mathbf{f}$  est continue sur  $U$  et quelle est localement lipschitzienne en  $\mathbf{y}$  :  $\forall (t, \mathbf{y}) \in U, \exists \mathcal{W}$  voisinage  $t, \exists \mathcal{V}$  voisinage  $\mathbf{y}, \exists L > 0$  tels que*

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \quad \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (7)$$

*Sous ces hypothèses le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution.*

## Proposition

*Si  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$  est continue et bornée, alors  $\mathbf{f}$  satisfait (7).*

# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- **Dérivation numérique**
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

On note  $t^n = a + nh$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $h = (b - a)/N$  une **discrétisation régulière de  $[a, b]$** . Soit  $(Dy)_n$  une approximation de  $y'(t^n)$ . On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (8)$$

On note  $t^n = a + nh$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $h = (b - a)/N$  une **discrétisation régulière de  $[a, b]$** . Soit  $(Dy)_n$  une approximation de  $y'(t^n)$ . On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (8)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (9)$$

On note  $t^n = a + nh$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $h = (b - a)/N$  une **discrétisation régulière de  $[a, b]$** . Soit  $(Dy)_n$  une approximation de  $y'(t^n)$ . On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (8)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (9)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (10)$$

## Definition

Soit  $g$  une fonction. On dit que  $g$  se comporte comme un grand  $O$  de  $h^q$  quand  $h$  tend vers 0

$$\exists H > 0, \exists C > 0, \text{ t.q. } |g(h)| \leq Ch^q, \quad \forall h \in ]-H, H[ \Leftrightarrow g(h) = \mathcal{O}(h^q)$$

## Proposition (Développement de Taylor)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b]; \mathbb{R})$ .

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$  il existe un  $\xi \in ]x, y[$  tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - y)^{r+1} \quad (11)$$

- $\forall x \in [a, b], \forall h \in \mathbb{R}^*$  vérifiant  $x + h \in [a, b]$ , il existe  $\xi \in ]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$  tel quel

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} h^{r+1} \quad (12)$$

## Définition

La différence  $|y'(t^n) - (Dy)_n|$  est appelée **erreur de troncature au point  $t^n$** . On dira que  $|y'(t^n) - (Dy)_n|$  est d'ordre  $p > 0$  si il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n| \leq Ch^p.$$

## Proposition

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^P| = \left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad (13)$$

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| = \left| y'(t^n) - \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad (14)$$

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^C| = \left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} \right| = \mathcal{O}(h^2). \quad (15)$$

# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{n+1} &= y^n + hf(t^n, y^n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^0 &= y(t^0) \end{cases} \quad (16)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de  $y^{n+1}$  en fonction de  $y^n$ .

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{n+1} &= y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \\ y^0 &= y(t^0) \end{cases} \quad (17)$$

Ce schéma est **implicite**, car  $y^{n+1}$  est défini implicitement en fonction de  $y^n$ . Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

# Plan

## 1 Introduction

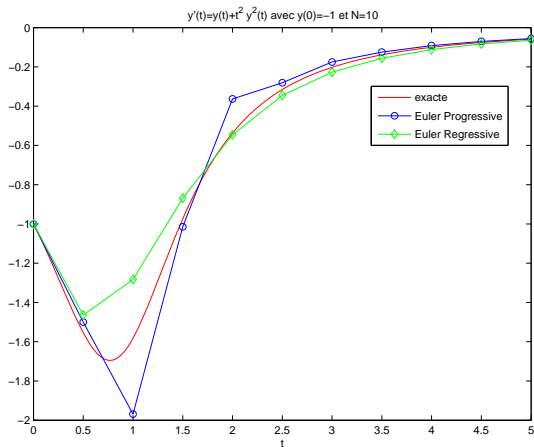
- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
  - Stabilité (absolue)
  - Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 y^2(t), & \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

de solution exacte

$$y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2).$$

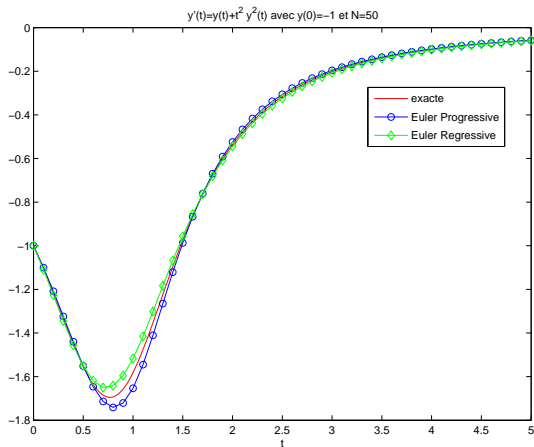


Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 y^2(t), & \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

de solution exacte

$$y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2).$$



# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- **Stabilité (absolue)**
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

## Stabilité (absolue)

On étudie le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $\lambda < 0$  est donné. La solution exacte est

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

En particulier, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

### Définition

*On pose  $t^n = nh$ , où le pas de temps  $h > 0$  est donné et  $y^n$  une approximation de  $y(t^n)$  par un schéma donné. On dit alors que le schéma associé à ce problème est absolument stable si*

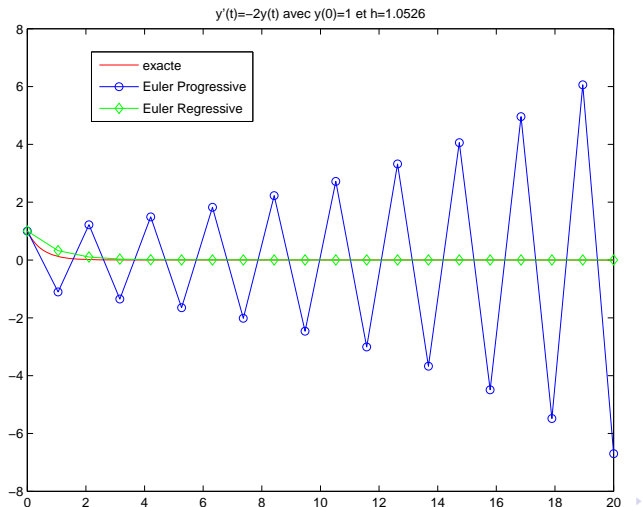
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y^n = 0.$$

## Stabilité (absolue)

- Ce n'est malheureusement pas toujours le cas avec le schéma d'Euler progressif et  $h = \frac{20}{19} \approx 1.05$ .

## Stabilité (absolue)

- Ce n'est malheureusement pas toujours le cas avec le schéma d'Euler progressif et  $h = \frac{20}{19} \approx 1.05$ .
- Instabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde :

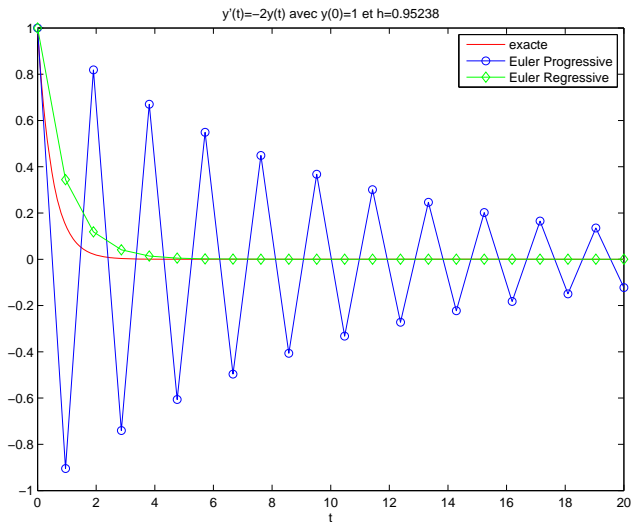


## Stabilité (absolue)

- Par contre, avec  $h = \frac{20}{21} \approx 0.95$ , le même schéma est stable.

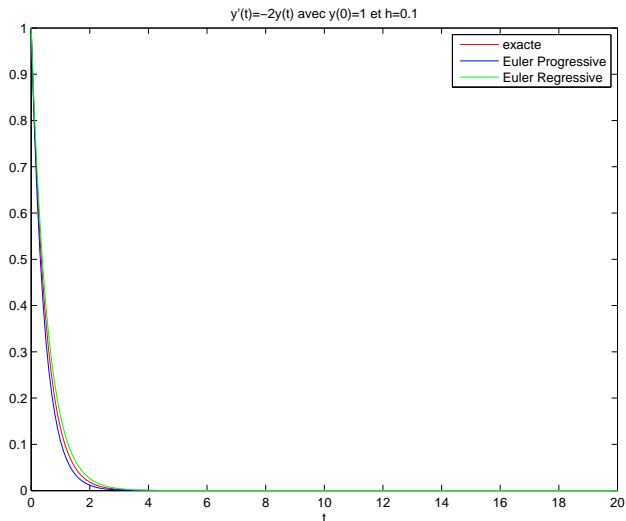
# Stabilité (absolue)

- Par contre, avec  $h = \frac{20}{21} \approx 0.95$ , le même schéma est stable.
- Stabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde :



## Stabilité (absolue)

Avec  $h = 0.1$ , les deux schémas sont stables :



## Stabilité (absolue) pour Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) = y^n + \lambda h y^n = (1 + \lambda h)y^n$

## Stabilité (absolue) pour Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) = y^n + \lambda h y^n = (1 + \lambda h)y^n$
- $y^n = (1 + \lambda h)^n y^0, \forall n \geq 0.$

## Stabilité (absolue) pour Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) = y^n + \lambda h y^n = (1 + \lambda h)y^n$
- $y^n = (1 + \lambda h)^n y^0, \forall n \geq 0.$
- si  $|1 + \lambda h| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = 0,$
- si  $|1 + \lambda h| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = +\infty,$

# Stabilité (absolue) pour Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) = y^n + \lambda h y^n = (1 + \lambda h)y^n$
- $y^n = (1 + \lambda h)^n y^0, \forall n \geq 0$ .
- si  $|1 + \lambda h| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = 0$ ,
- si  $|1 + \lambda h| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = +\infty$ ,
- Stabilité ssi  $|1 + \lambda h| < 1 \iff 0 < h < -\frac{2}{\lambda}$ .

# Stabilité (absolue) pour Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) = y^n + \lambda h y^n = (1 + \lambda h)y^n$
- $y^n = (1 + \lambda h)^n y^0, \forall n \geq 0$ .
- si  $|1 + \lambda h| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = 0$ ,
- si  $|1 + \lambda h| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = +\infty$ ,
- Stabilité ssi  $|1 + \lambda h| < 1 \iff 0 < h < -\frac{2}{\lambda}$ .
- Le schéma d'Euler progressif est **conditionnellement stable**.

## Stabilité (absolue) pour Euler régressif

Le schéma d'Euler régressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + \lambda h y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y^n$

## Stabilité (absolue) pour Euler régressif

Le schéma d'Euler régressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + \lambda h y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y^n$
- $y^n = \left( \frac{1}{1 - \lambda h} \right)^n y^0, \forall n \geq 0.$

## Stabilité (absolue) pour Euler régressif

Le schéma d'Euler régressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + \lambda h y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y^n$
- $y^n = \left( \frac{1}{1 - \lambda h} \right)^n y^0, \forall n \geq 0.$
- Or  $\left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = 0,$

## Stabilité (absolue) pour Euler régressif

Le schéma d'Euler régressif associé au problème modèle

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) = y^n + \lambda h y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y^n$
- $y^n = \left( \frac{1}{1 - \lambda h} \right)^n y^0, \forall n \geq 0.$
- Or  $\left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^n| = 0,$
- Le schéma d'Euler régressif est **inconditionnellement stable**.

# Plan

## 1 Introduction

- Exemples
  - Météorologie
  - Chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky
  - Mécanique
- Définition des E.D.O.
- Formulation générale : le problème de Cauchy
- Dérivation numérique
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m = 1$
- Exemple
- Stabilité (absolue)
- Méthode des différences finies pour le problème de Cauchy en dimension  $m$

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{y}^n + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^0 &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (18)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de  $\mathbf{y}^{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{y}^n$ .

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{y}^n + hf(t^{n+1}, \mathbf{y}^{n+1}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^0 &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (19)$$

Ce schéma est **implicite**, car  $\mathbf{y}^{n+1}$  est défini implicitement en fonction de  $\mathbf{y}^n$ .