TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.O.

1 Problèmes de Cauchy

EXERCICE 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a)\ \begin{cases} y''(t) + \alpha y'(t) + \beta \cos(y(t)) = \sin(t),\ t \in]0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} LCv''(t) + \left(\dfrac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\dfrac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e,\ t \in]0, 100] \\ v(0) = 0,\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} y''(t) = \mu(1 - y^2(t))y'(t) - y(t),\ t \in]0, 10] \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0,\ t \in]0, T] \\ y(0) = u_0,\ y^{(1)}(0) = v_0,\ y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux fonctions vectorielles définies $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ représentant la position au cours du temps de deux objets dans l'espace.

On note $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in [0, T]$.

On suppose que $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont solutions du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2}(t) = -gM_p \frac{\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)}{\|\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)\|^3} \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = -gM_q \frac{\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)}{\|\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)\|^3} \tag{2.2}$$

avec comme positions initiales $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^3$, et comme vitesses initiales $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^3$, $\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_q \in \mathbb{R}^3$.

Ecrire ce système différentiel sous la forme d'un problème de Cauchy.

2 Dérivation numérique

EXERCICE 3

On note $t^n = a + nh$, $n \in [\![0, N]\!]$ et $h = (b - a)/N$ une **discrétisation régulière de** $[a, b]$. Soit $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h},\ \forall n \in [\![0, N-1]\!] \tag{3.1}$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \ \forall n \in [\![1, N]\!] \tag{3.2}$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \ \forall n \in [\![1, N-1]\!] \tag{3.3}$$

Q. 1 *Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.*

1. *Montrer qu'il existe $\xi_P \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\xi_R \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que*

$$(Dy)_n^P = y'(t^n) + \frac{h}{2} y''(\xi_P)$$

et

$$(Dy)_n^R = y'(t^n) - \frac{h}{2} y''(\xi_R)$$

2. *En déduire que*

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^P| \leqslant Ch, \quad \textit{avec } \ C = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y''(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^R| \leqslant Dh, \quad \textit{avec } D = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y''(t)|$$

3. *Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour les différences finies progressive et régressive.* ▪

Q. 2 *Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.*

1. *Montrer qu'il existe $\xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\xi_2 \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que*

$$(Dy)_n^C = y'(t^n) + \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2))$$

2. *En déduire que*

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^C| \leqslant Eh^2, \quad \textit{avec } \ E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

3. *Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour la différence finie centrée.* ▪

EXERCICE 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0, N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $\boldsymbol{F}_n = f(t^n)$.

Q. 1 1. *Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{V}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h).$$

2. *Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédant.* ▪

Q. 2 1. *Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2).$$

2. *Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédant.* ▪

3 Schémas

EXERCICE 5

On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \quad (5.1)$$
$$y(0) = 0. \quad (5.2)$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lll} y^{[n+1]} & = & y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} & & \text{donné.} \end{array} \right.$$

Q. 1 1. *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.*

2. *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème* (5.1-5.2) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

3. *Quel est le lien entre $y^{[n]}$ et la fonction y.*

4. *Ecrire une fonction* EulerProg *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.*

5. *Ecrire un algorithme complet de résolution de* (5.1-5.2) *par le schéma d'Euler progressif.* ■

Le schéma d'Euler progressif est d'ordre 1.

Q. 2 1. *Expliquer comment retrouver numériquement cet ordre (en utilisant la solution exacte de* (5.1-5.2)*).*

2. *Proposer un algorithme mettant en oeuvre cet technique.* ■

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lll} y^{[n+1]} & = & y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \\ y^{[0]} & & \text{donné.} \end{array} \right.$$

Q. 3 1. *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler régressif pour résoudre le problème* (5.1-5.2) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

2. *Ecrire une fonction* EulerReg *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler régressif. On pourra utiliser la fonction* PointFixe *de paramètres ϕ,* x_0*, `tol`, `nmax` retournant une approximation du point x tel que $\phi(x) = x$. L'algorithme utilisé par cette fonction est une méthode de point fixe avec pour point initial x_0, une tolérance de `tol`, un nombre maximum d'itération `nmax`.*

3. *Ecrire un algorithme complet de résolution de* (5.1-5.2) *par le schéma d'Euler régressif.* ■