

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.P.

Groupes B12 à B16

Travail individuel et personnel

Table des matières

1 Différences finies 1D	1
1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet	1
1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet	2
1.2.1 Neumann ordre 1	2
1.2.2 Neumann ordre 2	2

1 Différences finies 1D

1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\tag{1.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x) + 4\sin(2x)$, $u_a = 1$ et $u_b = 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + \sin(2x)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction Lap1D (fichier Lap1D.m) permettant de générer cette matrice.* ■

Le programme fourni (fichier Edp0.m), utilisant la fonction précédente, permet de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Dans ce programme, la variable \mathbf{x} contient l'ensemble des x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ définie par

$$x_i = a + ih, \text{ avec } h = (b - a)/N.$$

Q. 2 *Ecrire le programme OrdreEdp0 (fichier OrdreEDP0.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

Q. 3 Ecrire le programme Edp1 (fichier Edp1.m) permettant de calculer et représenter une solution approchée de :

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.4)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

avec $\nu \geq 0$. ■

A faire

- ◇ Créer une archive compressée nommée <NOM>-TP2-Q1aQ3 contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q1 à Q3. Ici <NOM> correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à cuvelier@math.univ-paris13.fr ayant pour **sujet** "<NOM> TP2 Q1 a Q3".

1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.7)$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x)$, $v_a = 2$ et $u_b = 4\pi$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

1.2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 4 Ecrire le programme Edp2 (fichier Edp2.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 5 Ecrire le programme OrdreEdp2 (fichier OrdreEDP2.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

1.2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 6 Ecrire le programme Edp2 (fichier Edp2.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 7 Ecrire le programme OrdreEdp2 (fichier OrdreEDP2.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

A faire

- ◇ Créer une archive compressée nommée <NOM>-TP2-Q4aQ7 contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q4 à Q7. Ici <NOM> correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à cuvelier@math.univ-paris13.fr ayant pour **sujet** "<NOM> TP2 Q4 a Q7".