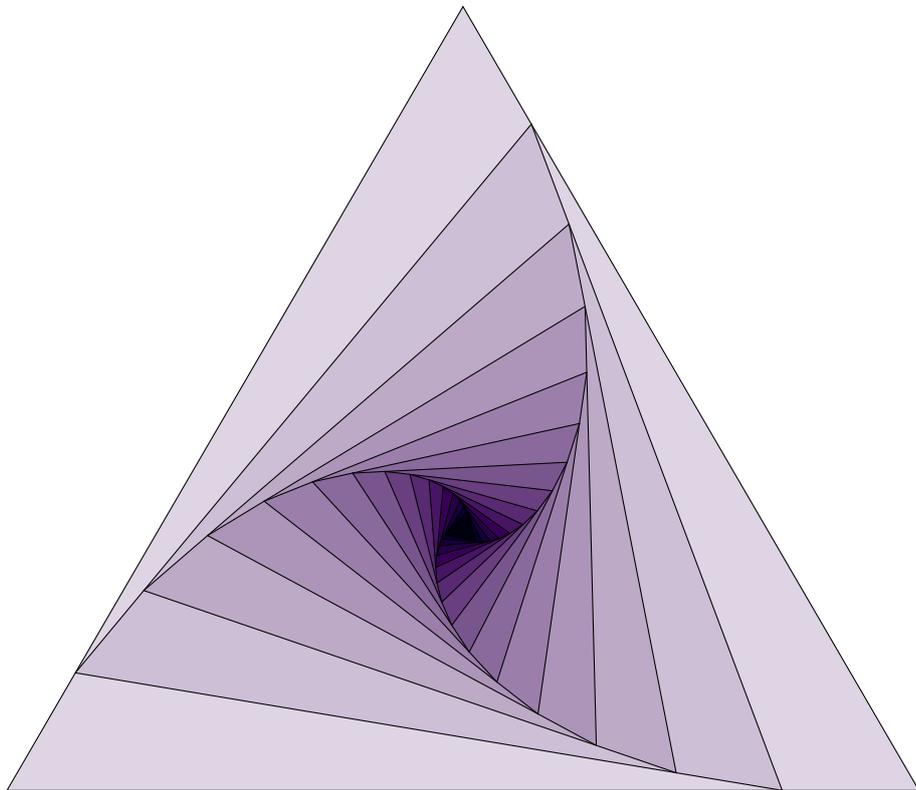


Méthodes numériques II

Notes de cours

Sup Galilée, Ingénieurs Energétique 1ère année



Francois Cuvelier
Université Paris XIII / Institut Galilée
L.A.G.A./Département de Mathématiques
<http://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier>

Table des matières

1 Langage Algorithmique	1
1.1 Pseudo-langage algorithmique	1
1.1.1 Données et constantes	1
1.1.2 Variables	1
1.1.3 Opérateurs	2
1.1.4 Expressions	2
1.1.5 Instructions	3
1.1.6 Fonctions	4
1.2 Méthodologie d'élaboration d'un algorithme	6
1.2.1 Description du problème	6
1.2.2 Recherche d'une méthode de résolution	6
1.2.3 Réalisation d'un algorithme	7
1.2.4 Exercices	7
1.3 Principes de «bonne» programmation pour attaquer de «gros» problèmes	9
2 Dérivation numérique	11
3 Introduction à la résolution d'E.D.O.	17
3.1 Introduction	17
3.1.1 Exemple en météorologie : modèle de Lorentz	17
3.1.2 Exemple en biologie	19
3.1.3 Exemple en chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky	19
3.1.4 Exemple en mécanique	20
3.2 Problème de Cauchy	22
3.3 Différences finies pour les E.D.O.	25
3.3.1 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension $m = 1$	25
3.3.2 Stabilité	27
3.3.3 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension m	29
3.4 Méthode à un pas ou à pas séparés	30
3.4.1 Schéma général	30
3.4.2 Convergence	30
3.4.3 Stabilité	30
3.4.4 Consistance	30
3.4.5 Ordre	30

3.5	Méthode de Runge-Kutta	31
3.5.1	Principe	31
3.5.2	Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2	31
3.5.3	Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4	32
3.6	Méthodes à pas multiples	33
3.6.1	Exemple : schéma de point milieu	33
3.6.2	Le principe	33
3.6.3	Méthodes d'Adams-Bashforth	34
3.6.4	Méthodes d'Adams-Moulton	34
3.6.5	Schéma prédicteur-correcteur	35
4	Introduction à la résolution d'E.D.P.	37

Chapitre 1

Langage Algorithmique

1.1 Pseudo-langage algorithmique

Pour uniformiser l'écriture des algorithmes nous employons, un pseudo-langage contenant l'indispensable :

- variables,
- opérateurs (arithmétiques, relationnels, logiques),
- expressions,
- instructions (simples et composées),
- fonctions.

Ce pseudo-langage sera de fait très proche du langage de programmation de Matlab.

1.1.1 Données et constantes

Une donnée est une valeur introduite par l'utilisateur (par ex. une température, une vitesse, ...). Une constante est un symbole ou un identificateur non modifiable (par ex. π , la constante de gravitation,...)

1.1.2 Variables

Definition 1.1

Une variable est un objet dont la valeur est modifiable, qui possède un nom et un type (entier, caractère, réel, complexe, ...). Elle est rangée en mémoire à partir d'une certaine adresse.

1.1.3 Opérateurs

Opérateurs arithmétiques

Nom	Symbole	exemple
addition	+	$a + b$
soustraction	-	$a - b$
opposé	-	$-a$
produit	*	$a * b$
division	/	a/b
puissance a^b	^	a^b

Table 1.1: Opérateurs arithmétiques

Opérateurs relationnels

Nom	Symbole	exemple	Commentaires
identique	==	$a == b$	vrai si a et b ont même valeur, faux sinon.
différent	~=	$a ~= b$	faux si a et b ont même valeur, vrai sinon.
inférieur	<	$a < b$	vrai si a est plus petit que b , faux sinon.
supérieur	>	$a > b$	vrai si a est plus grand que b , faux sinon.
inférieur ou égal	<=	$a <= b$	vrai si a est plus petit ou égal à b , faux sinon.
supérieur ou égal	>=	$a >= b$	vrai si a est plus grand ou égal à b , faux sinon.

Table 1.2: Opérateurs relationnels

Opérateurs logiques

Nom	Symbole	exemple	Commentaires
négation	~	$\sim a$	vrai si a est faux (ou nul), faux sinon.
ou		$a b$	vrai si a ou b est vrai (non nul), faux sinon.
et	&	$a\&b$	vrai si a et b sont vrais (non nul), faux sinon.

Table 1.3: Opérateurs logiques

Opérateur d'affectation

Nom	Symbole	exemple	Commentaires
affectation	←	$a \leftarrow b$	On affecte à la variable a le contenu de b

Table 1.4: Opérateurs d'affectation

1.1.4 Expressions

 **Definition 1.2**

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple 1.3 • Voici un exemple classique d'expression numérique :

$$(b * b - 4 * a * c) / (2 * a).$$

On appelle **opérandes** les identifiants a , b et c , et les nombres 4 et 2. Les symboles $*$, $-$ et $/$ sont les **opérateurs**.

- Voici un exemple classique d'expression booléenne (logique) :

$$(x < 3.14)$$

Dans cette expression, x est une variable numérique et 3.14 est un nombre réel. Cette expression prendra la valeur vrai (i.e. 1) si x est plus grand que 3.14. Sinon, elle prendra la valeur faux (i.e. 0)

1.1.5 Instructions

♥ Definition 1.4

Une **instruction** est un ordre ou un groupe d'ordres qui déclenche l'exécution de certaines actions par l'ordinateur. Il y a deux types d'instructions : simple et structuré.

Les **instructions simples** sont essentiellement des ordres seuls et inconditionnels réalisant l'une des tâches suivantes :

1. affectation d'une valeur a une variable.
2. appel d'une fonction (procedure, subroutine, ... suivant les langages).

Les **instructions structurées** sont essentiellement :

1. les instructions composées, groupe de plusieurs instructions simples,
2. les instructions répétitives, permettant l'exécution répétée d'instructions simples, (i.e. boucles «pour», «tant que»)
3. les instructions conditionnelles, lesquels ne sont exécutées que si une certaine condition est respectée (i.e. «si»)

Les exemples qui suivent sont écrits dans un pseudo langage algorithmique mais sont facilement transposable dans la plupart des langages de programmation.

Instructions simples

Voici un exemple de l'*instruction simple d'affectation* :

```
1: a ← 3.14 * R
```

On évalue l'expression $3.14 * R$ et affecte le résultat à la variable a .

Un autre exemple est donné par l'*instruction simple d'affichage* :

```
affiche('bonjour')
```

Affiche la chaîne de caractères 'bonjour' à l'écran. Cette instruction fait appel à la fonction `affiche`.

Instructions composées

Instructions répétitives, boucle «pour»

Algorithme 1.1 Exemple de boucle «pour»

Données : n : un entier.

```
1: S ← 0
2: Pour i ← 1 à n faire
3:   S ← S + cos(i2)
4: Fin Pour
```

Instruction répétitive, boucle «tant que»

Algorithme 1.2 Exemple de boucle «tant que»

```

1:  $i \leftarrow 0, x \leftarrow 1$ 
2: Tantque  $i < 1000$  faire
3:    $x \leftarrow x + i * i$ 
4:    $i \leftarrow i + 1$ 
5: Fin Tantque

```

Instruction répétitive, boucle «répéter ...jusqu'à»

Algorithme 1.3 Exemple de boucle «répéter ...jusqu'à»

```

1:  $i \leftarrow 0, x \leftarrow 1$ 
2: Répéter
3:    $x \leftarrow x + i * i$ 
4:    $i \leftarrow i + 1$ 
5: jusqu'à  $i \geq 1000$ 

```

Instructions conditionnelles «si»

Algorithme 1.4 Exemple d'instructions conditionnelle «si»

Données : *age* : un réel.

```

1: Si  $age \geq 18$  alors
2:   affiche('majeur')
3: Sinon Si  $age \geq 0$  alors
4:   affiche('mineur')
5: Sinon
6:   affiche('en devenir')
7: Fin Si

```

1.1.6 Fonctions

Les fonctions permettent

- d'automatiser certaines tâches répétitives au sein d'un même programme,
- d'ajouter à la clarté d'un programme,
- l'utilisation de portion de code dans un autre programme,
- ...

Fonctions prédéfinies

Pour faciliter leur usage, tous les langages de programmation possèdent des fonctions prédéfinies. On pourra donc supposer que dans notre langage algorithmique un grand nombre de fonctions soient prédéfinies : par exemple, les fonctions mathématiques \sin , \cos , \exp , abs , \dots (pour ne citer celles)

Syntaxe

On utilise la syntaxe suivante pour la définition d'une fonction

```

Fonction [args1, ..., argsn] ← NOMFONCTION( arge1, ..., argem )
    instructions
Fin Fonction

```

La fonction se nomme **NOMFONCTION**. Elle admet comme paramètres d'entrée (données) les m arguments $arge_1, \dots, arge_m$ et comme paramètres de sortie (résultats) les n arguments $args_1, \dots, args_n$. Ces derniers doivent être déterminés dans le corps de la fonction (partie instructions).

Dans le cas où la fonction n'admet qu'un seul paramètre de sortie, l'écriture se simplifie :

```

Fonction args ← NOMFONCTION( arge1, ..., argem )
    instructions
Fin Fonction

```

Ecrire ses propres fonctions

Pour écrire une fonction «propre», il faut tout d'abord déterminer exactement ce que devra faire cette fonction.

Puis, il faut pouvoir répondre à quelques questions :

1. Quelles sont les données (avec leurs limitations)?
2. Que doit-on calculer ?

Et, ensuite il faut la **commenter** : expliquer son usage, type des paramètres,

Exemple : résolution d'une équation du premier degré

Nous voulons écrire une fonction calculant la solution de l'équation

$$ax + b = 0,$$

où nous supposons que $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. La solution de ce problème est donc

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Les données de cette fonction sont $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Elle doit retourner $x = -\frac{b}{a}$ solution de $ax + b = 0$.

Algorithme 1.5 Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

Données : a : nombre réel différent de 0

b : nombre réel.

Résultat : x : un réel.

- 1: **Fonction** $x \leftarrow \text{REPD}(a, b)$
 - 2: $x \leftarrow -b/a$
 - 3: **Fin Fonction**
-

Remarque 1.5 Cette fonction est très simple, toutefois pour ne pas «alourdir» le code nous n'avons pas vérifié la validité des données fournies.



Exercice 1.1.1

Ecrire un algorithme permettant de valider cette fonction.

Exemple : résolution d'une équation du second degré

Nous cherchons les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.1)$$

où nous supposons que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Mathématiquement, l'étude des solutions réelles de cette équation nous amène à envisager trois cas suivant les valeurs du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors les deux solutions sont complexes,
- si $\Delta = 0$ alors la solution est $x = -\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$ alors les deux solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2*a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2*a}$.

 **Exercice 1.1.2**

1. Ecrire la fonction `discriminant` permettant de calculer le discriminant de l'équation (1.1).
2. Ecrire la fonction `RESD` permettant de résoudre l'équation (1.1) en utilisant la fonction `discriminant`.
3. Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions.

 **Exercice 1.1.3**

Même question que précédemment dans le cas complexe (solution et coefficients).

1.2 Méthodologie d'élaboration d'un algorithme

1.2.1 Description du problème

- Spécification d'un ensemble de données
Origine : énoncé, hypothèses, sources externes, ...
- Spécification d'un ensemble de buts à atteindre
Origine : résultats, opérations à effectuer, ...
- Spécification des contraintes

1.2.2 Recherche d'une méthode de résolution

- Clarifier l'énoncé.
- Simplifier le problème.
- Ne pas chercher à le traiter directement dans sa globalité.
- S'assurer que le problème est soluble (sinon problème d'indécidabilité!)
- Recherche d'une stratégie de construction de l'algorithme
- Décomposer le problème en sous problèmes partiels plus simples : raffinement.
- Effectuer des raffinements successifs.
- Le niveau de raffinement le plus élémentaire est celui des instructions.

1.2.3 Réalisation d'un algorithme

Il doit être conçu indépendamment du langage de programmation et du système informatique (sauf cas très particulier)

- L'algorithme doit être exécuté en un nombre fini d'opérations.
- L'algorithme doit être spécifié clairement, sans la moindre ambiguïté.
- Le type de données doit être précisé.
- L'algorithme doit fournir au moins un résultat.
- L'algorithme doit être effectif : toutes les opérations doivent pouvoir être simulées par un homme en temps fini.

Pour écrire un algorithme détaillé, il faut tout d'abord savoir répondre à quelques questions :

- Que doit-il faire ? (i.e. Quel problème est-il censé résoudre?)
- Quelles sont les données nécessaires à la résolution de ce problème?
- Comment résoudre ce problème «à la main» (sur papier)?

Si l'on ne sait pas répondre à l'une de ces questions, l'écriture de l'algorithme est fortement compromise.

1.2.4 Exercices



Exercice 1.2.1: Algorithme pour une somme

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^n k \sin(2 * k * x)$$

Correction Exercice 1.2.1 L'énoncé de cet exercice est imprécis. On choisit alors $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ pour rendre possible le calcul. Le problème est donc de calculer

$$\sum_{k=1}^n k \sin(2kx).$$

Toutefois, on aurait pu choisir $x \in \mathbb{C}$ ou encore un tout autre problème :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } S(x) = \sum_{k=1}^n k \sin(2kx)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et S , fonction de \mathbb{R} à valeurs réelles, sont les données!

Algorithme 1.6 Calcul de $S = \sum_{k=1}^n k \sin(2kx)$

Données : x : nombre réel,
 n : nombre entier.

Résultat : S : un réel.

- 1: $S \leftarrow 0$
 - 2: **Pour** $k \leftarrow 1$ à n **faire**
 - 3: $S \leftarrow S + k * \sin(2 * k * x)$
 - 4: **Fin Pour**
-

◇

 **Exercice 1.2.2: Algorithme pour un produit**

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^k \sin(2 * k * z/n)^k$$

Correction Exercice 1.2.2 L'énoncé de cet exercice est imprécis. On choisit alors $z \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ pour rendre possible le calcul.

Algorithme 1.7 Calcul de $P = \prod_{n=1}^k \sin(2kz/n)^k$

Données : z : nombre réel,
 k : nombre entier.

Résultat : P : un réel.

- 1: $P \leftarrow 1$
 - 2: **Pour** $n \leftarrow 1$ à k **faire**
 - 3: $P \leftarrow P * \sin(2 * k * z/n)^k$
 - 4: **Fin Pour**
-

◇

 **Exercice 1.2.3: Série de Fourier**

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right\}.$$

Ecrire la fonction SFT permettant de calculer $x_n(t)$.

Correction Exercice 1.2.3 Nous devons écrire la fonction permettant de calculer

$$x_n(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)\omega t)$$

Les données de la fonction sont $A \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

Grâce à ces renseignements nous pouvons déjà écrire l'entête de la fonction :

Algorithme 1.8 En-tête de la fonction SFT retournant valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice 1.2.3.

Données : t : nombre réel,
 n : nombre entier strictement positif
 A, ω : deux nombres réels.

Résultat : x : un réel.

- 1: **Fonction** $x \leftarrow \text{SFT}(t, n, A, \omega)$
 - 2: ...
 - 3: **Fin Fonction**
-

Maintenant nous pouvons écrire progressivement l'algorithme pour aboutir au final à une version ne contenant que des opérations élémentaires.

Algorithme 1.9 \mathcal{R}_0

$$1: x \leftarrow \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \times}{\cos((2k-1)\omega t)} \right)$$

Algorithme 1.9 \mathcal{R}_1

$$\left. \begin{array}{l} 1: S \leftarrow \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)\omega t) \\ 2: x \leftarrow \frac{4A}{\pi} S \end{array} \right\}$$

Algorithme 1.9 \mathcal{R}_1

$$1: S \leftarrow \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)\omega t)$$

$$2: x_n(t) \leftarrow \frac{4A}{\pi} S$$

Algorithme 1.9 \mathcal{R}_2

$$\left. \begin{array}{l} 1: S \leftarrow 0 \\ 2: \text{Pour } k = 1 \text{ à } n \text{ faire} \\ 3: \quad S \leftarrow S + (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} * \cos((2k-1)\omega t) \\ 4: \text{Fin Pour} \\ 5: x_n(t) \leftarrow \frac{4A}{\pi} S \end{array} \right\}$$

Finalement la fonction est

Algorithme 1.9 Fonction SFT retournant la valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice ??.

Données : t : nombre réel,
 n : nombre entier strictement positif
 A, ω : deux nombres réels.

Résultat : x : un réel.

- 1: **Fonction** $x \leftarrow \text{SFT}(t, n, A, \omega)$
- 2: $S \leftarrow 0$
- 3: **Pour** $k = 1$ à n **faire**
- 4: $S \leftarrow S + ((-1)^{(k+1)}) * \cos((2 * k - 1) * \omega * t) / (2 * k - 1)$
- 5: **Fin Pour**
- 6: $S \leftarrow 4 * A * S / \pi$
- 7: **Fin Fonction**

◇

**Exercice 1.2.4**

Reprendre les trois exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

1.3 Principes de «bonne» programmation pour attaquer de «gros» problèmes

Tous les exemples vus sont assez courts. Cependant, il peut arriver que l'on ait des programmes plus longs à écrire (milliers de lignes, voir des dizaines de milliers de lignes). Dans l'industrie, il arrive que des équipes produisent des codes de millions de lignes, dont certains mettent en jeu des vies humaines (contrôler un avion de ligne, une centrale nucléaire, ...). Le problème est évidemment d'écrire des programmes sûrs. Or, *un programme à 100% sûr, cela n'existe pas!* Cependant, plus un programme est simple, moins le risque d'erreur est grand : c'est sur cette remarque de bon sens que se basent les «bonnes» méthodes. Ainsi :

Tout problème compliqué doit être découpé en sous-problèmes plus simples

Il s'agit, lorsqu'on a un problème P à résoudre, de l'analyser et de le décomposer en un ensemble de problèmes P_1, P_2, P_3, \dots plus simples. Puis, P_1 , est lui-même analysé et décomposé en P_{11}, P_{12}, \dots , et

P_2 en P_{21}, P_{22} , etc. On poursuit cette analyse jusqu'à ce qu'on n'ait plus que des problèmes élémentaires à résoudre. Chacun de ces problèmes élémentaires est donc traité séparément dans un module, c'est à dire un morceau de programme relativement indépendant du reste. Chaque module sera *testé et validé* séparément dans la mesure du possible et naturellement *largement documenté*. Enfin ces modules élémentaires sont assemblés en modules de plus en plus complexes, jusqu'à remonter au problème initiale. A chaque niveau, il sera important de bien réaliser les phases de test, validation et documentation des modules.

Par la suite, on s'évertue à écrire des algorithmes!
Ceux-ci ne seront pas optimisés^a!

^aaméliorés pour minimiser le nombre d'opérations élémentaires, l'occupation mémoire, ..

Chapitre 2

Dérivation numérique

Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 et $t \in [a, b]$. La dérivée $y'(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}\end{aligned}$$

♥ Definition 2.1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation régulière de $[a, b]$ à N pas ou $N + 1$ points** l'ensemble des points $a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ où le pas h est donné par $h = (b - a)/N$.

Soient $\{t^n\}_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ une discrétisation régulière de $[a, b]$ et $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (2.1)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (2.2)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (2.3)$$

Pour calculer l'erreur commise par ces approximations, on rappelle le développement de Taylor

 **Proposition 2.2: Développement de Taylor**

Soit f une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ alors

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ il existe un $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x-y)^{r+1} \quad (2.4)$$

- $\forall x \in [a, b], \forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x+h \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$ tel quel

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} h^{r+1} \quad (2.5)$$

 **Definition 2.3**

Soit g une fonction. On dit que g **se comporte comme un grand O de h^q** quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$|g(h)| \leq Ch^q, \quad \forall h \in]-H, H[.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.

Avec cette notation le développement de Taylor (2.5) s'écrit aussi

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \mathcal{O}(h^{r+1}). \quad (2.6)$$

 **Exercice 2.0.1**

Q. 1 Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leq C_1 h, \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^R| \leq C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

Q. 2 Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leq Eh^2, \text{ avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

Correction Exercice 3.2.1

Q. 1 1. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a $t^{n+1} = t^n + h$ et

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}.$$

D'après la formule de Taylor (2.5), il existe $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ tel que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(\eta_P^n) \quad (2.7)$$

d'où

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2!} y^{(2)}(\eta_P^n). \quad (2.8)$$

Soit $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $t^{n-1} = t^n - h$ et

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}.$$

D'après la formule de Taylor (2.5), il existe $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^{n-1}) = y(t^n) - h y^{(1)}(t^n) + \frac{(-h)^2}{2!} y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (2.9)$$

d'où

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (2.10)$$

2. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, comme $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (2.8),

$$|(Dy)_n^P - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2} |y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (2.10),

$$|(Dy)_n^R - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2} |y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|.$$

Q. 2 1. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}.$$

D'après la formule de Taylor (2.5), il existe $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t^n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\eta_1^n) \quad (2.11)$$

et

$$y(t^{n-1}) = y(t^n) - h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t^n) - \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\eta_2^n) \quad (2.12)$$

En soustrayant (2.12) à (2.11), on obtient

$$y(t^{n+1}) - y(t^{n-1}) = 2h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^3}{6} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

d'où

$$y^{(1)}(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n)).$$

2. Comme $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$, on en déduit que

$$|y^{(3)}(\eta_1^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(3)}(\eta_2^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

◇

♥ Définition 2.4

La différence $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est appelée **erreur de troncature au point t^n** . On dira que $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est d'ordre $p > 0$ si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n| \leq Ch^p \iff |y'(t^n) - (Dy)_n| = \mathcal{O}(h^p).$$

Les erreurs de troncature des différences finies progressive et rétrograde sont d'ordre 1 et l'erreur de troncature de la différence finie centrée est d'ordre 2.

On a démontré le lemme suivant

📖 Lemme 2.5

Si $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ alors

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (2.13)$$

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} \right| = \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.14)$$

Si $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$ alors

$$\left| y'(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} \right| = \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket. \quad (2.15)$$

👤 Exercice 2.0.2

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q. 1 1. Déterminer en fonction de h et \mathbf{F} , un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

2. Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent.

Q. 2 1. Connaissant uniquement le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$W_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2).$$

2. *Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{W} précédant.*

Chapitre 3

Introduction à la résolution d'E.D.O.

3.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires ou E.D.O.¹ sont utilisées pour modéliser un grand nombre de phénomènes mécaniques, physiques, chimiques, biologiques, ...

♥ Definition 3.1

On appelle **équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre p** une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

♥ Definition 3.2

On appelle **forme canonique d'une E.D.O.** une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (3.1)$$

📖 Proposition 3.3

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles d'ordre 1.

3.1.1 Exemple en météorologie : modèle de Lorentz

Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les premiers ordinateurs existant au temps

¹En anglais, *ordinary differential equations* ou O.D.E.

de Lorenz. Celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté, beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ.

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ et les données initiales $x(0) = -8$, $y(0) = 8$ et $z(0) = \rho - 1$. C'est un système de trois E.D.O. d'ordre 1.

Dans ces équations, σ , ρ et β sont trois paramètres réels.

$x(t)$ est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire (Lorenz 1963 p.135).

Pour illustrer le caractère chaotique de ce système différentiel, on le résoud numériquement avec les données initiales *exactes* (courbe bleue de la figure 3.1) et avec la donnée initiale *x(0) perturbées* : $x(0) = -8 + 1e - 4$ (courbe rouge de la figure 3.1). Une très légère variation des données initiales engendrent de très forte variation de la solution.

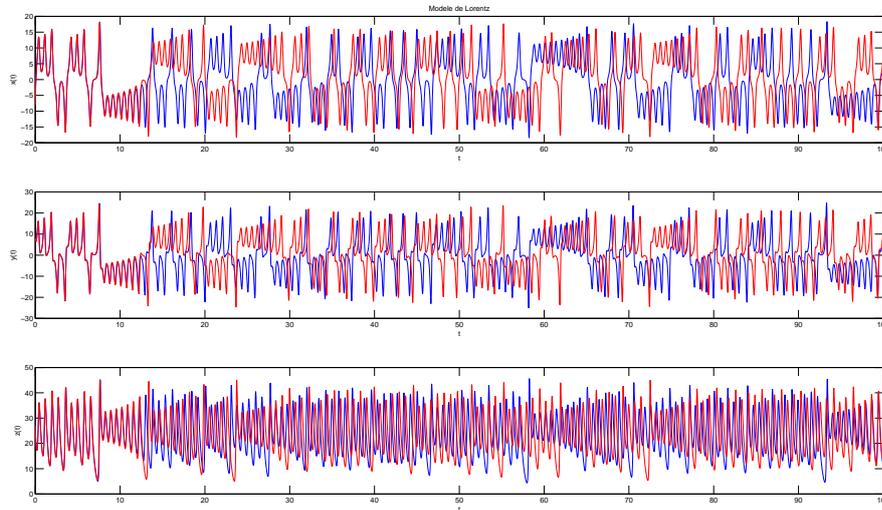


Figure 3.1: Illustration du caractère chaotique du modèle de Lorenz : donnée initiale courbe bleue $x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$, courbe rouge $x(0) = -8 + 1e - 4, y(0) = 8, z(0) = 27$.

En représentant, en Figure 3.2, la courbe paramétré $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace, on obtient l'*attracteur étrange de Lorenz* en forme d'aile de papillon

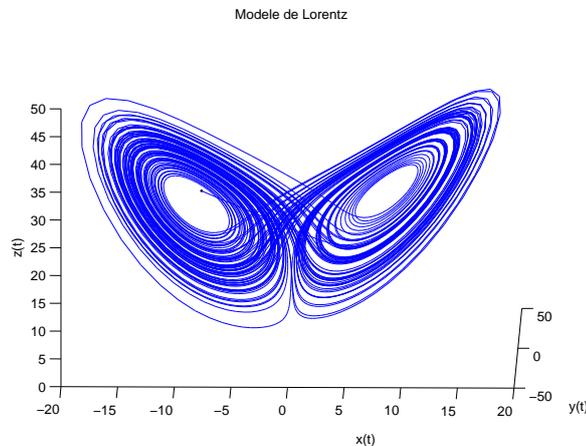


Figure 3.2: Attracteur étrange de Lorenz

3.1.2 Exemple en biologie

Considérons une population y d'animaux dans un milieu ambiant où au plus B animaux peuvent coexister. On suppose que initialement la population soit $y_0 \ll B$ et que le facteur de croissance des animaux soit égal à une constante C . Dans ce cas, l'évolution de la population au cours du temps sera proportionnelle au nombre d'animaux existants, sans toutefois que ce nombre ne dépasse la limite B . Cela peut s'exprimer à travers l'équation

$$y'(t) = Cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{B}\right), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (3.3)$$

La résolution de cette équation permet de trouver l'évolution de la population au cours du temps.

On considère maintenant deux populations, y_1 et y_2 , où y_1 sont les proies et y_2 sont les prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

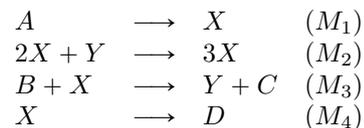
$$\begin{cases} y_1'(t) &= C_1 y_1(t) [1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)], \\ y_2'(t) &= -C_2 y_2(t) [1 - d_1 y_1(t)], \end{cases} \quad (3.4)$$

où C_1 et C_2 sont les facteurs de croissance des deux populations, d_1 et d_2 tiennent compte de l'interaction entre les deux populations, tandis que b_1 est lié à la quantité de nourriture disponible pour la population des proies y_1 . Ce système de deux équations différentielles d'ordre 1 est connu comme modèle de *Lotka-Volterra*.

3.1.3 Exemple en chimie : La réaction de Belousov-Zhabotinsky

Sous certaines conditions, des réactions chimiques peuvent être oscillantes. Par exemple, le mélange d'une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique avec une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entraîner une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleu avec une période de 7 secondes.

Le modèle associé est nommé **modèle du bruxelator** basé sur les équations chimiques :



On note k_i , $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ les vitesses de réactions des équations (M_i) . On obtient alors le système différentiel suivant :

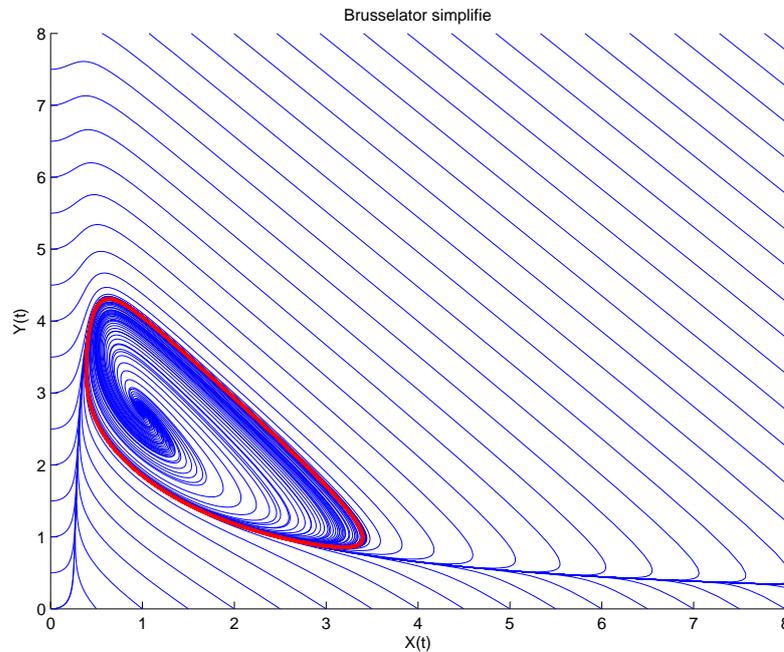
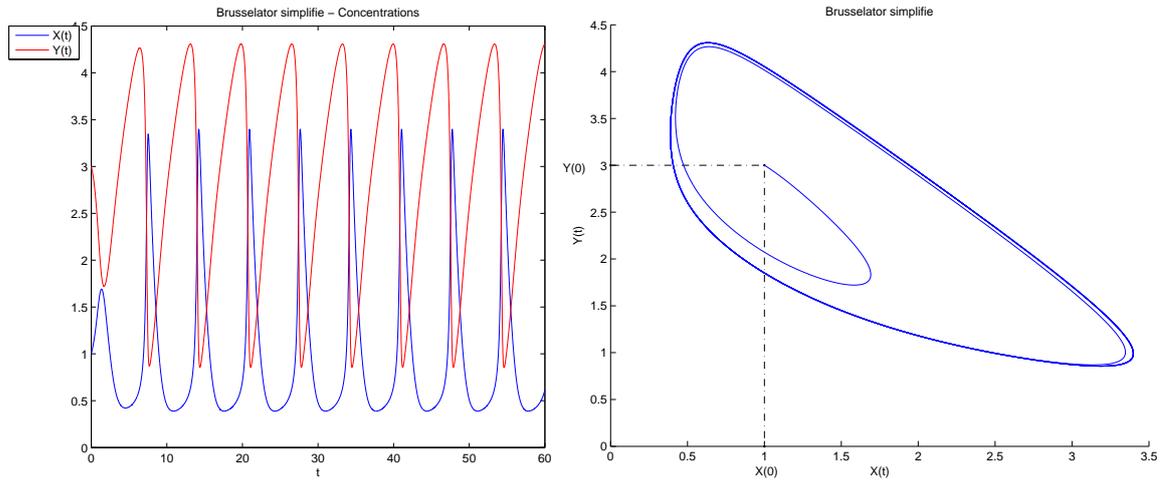
$$\begin{cases} A'(t) &= -k_1 A(t) \\ B'(t) &= -k_3 B(t) X(t) \\ X'(t) &= k_1 A(t) + k_2 X^2(t) Y(t) - k_3 B(t) X(t) - k_4 X(t) \\ Y'(t) &= -k_2 X^2(t) Y(t) + k_3 B(t) X(t) \end{cases}$$

Exemple 3.4 Dans cet exemple, on étudie le problème simplifié du Bruxelator. Lorsque les réactions de (??) ont des constantes de réactions k_1, \dots, k_4 égales respectivement à 1, $\alpha > 0$, 1 et 1, et que les concentrations de A et B sont constantes, respectivement égales à 1 et $\beta > 0$, on est alors amené à résoudre l'E.D.O. $\forall t \in]0, T]$,

$$\begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t) Y(t) - (\beta + 1) X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t) Y(t) + \beta X(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

C'est un système de deux E.D.O. d'ordre 1.

Par exemple, avec le jeu de données $\alpha = 1$, $\beta = 3.5$ et les conditions initiales $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$ on obtient des oscillations :



3.1.4 Exemple en mécanique

Le pendule pesant le plus simple est constitué d'un petit objet pesant accroché à une tige de masse négligeable devant celle de l'objet. L'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule. On note $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule par rapport à l'axe vertical, à un instant t , L la longueur de la tige, M sa masse et g l'accélération de la pesanteur. Ce pendule est représenté en Figure 3.3.

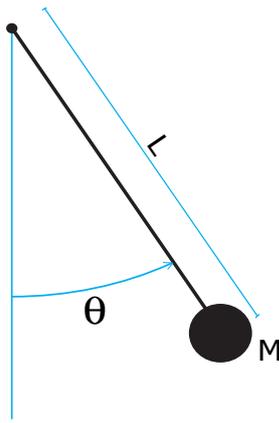


Figure 3.3: Pendule simple

Si le pendule est soumis à un frottement visqueux de coefficient $\nu > 0$, l'équation différentielle est alors

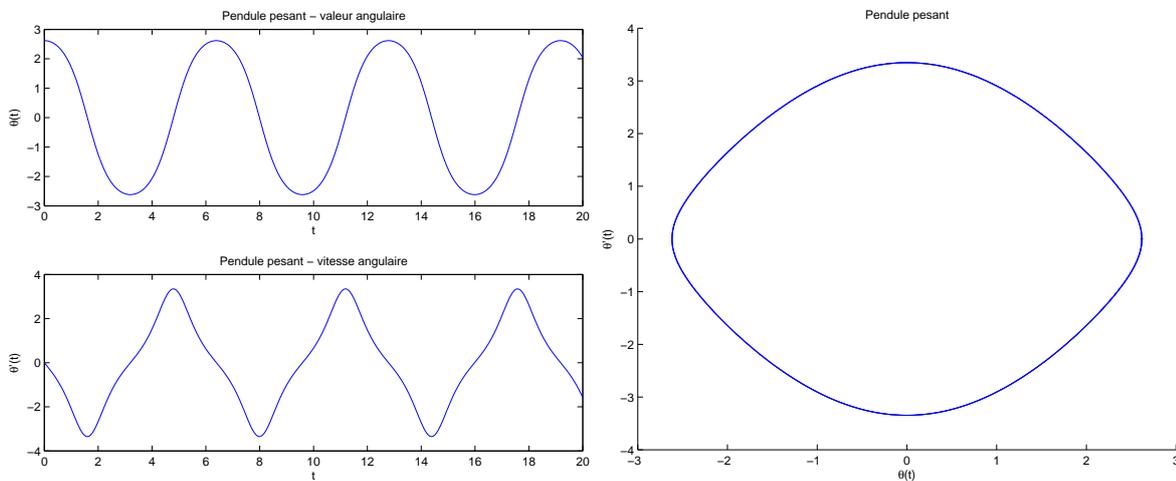
$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) + \frac{\nu}{ML^2} \theta'(t) = 0, \quad \forall t \in]0, T], \quad (3.6)$$

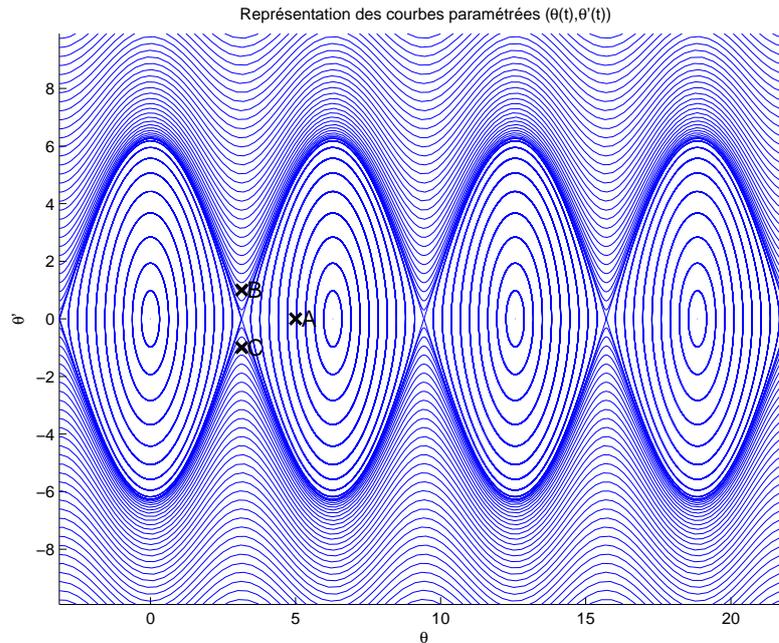
avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(0) &= \theta_0, \text{ position angulaire initiale,} \\ \theta'(0) &= \theta'_0, \text{ vitesse angulaire initiale,} \end{cases} \quad (3.7)$$

C'est une E.D.O. d'ordre 2.

Par exemple, dans le cas non visqueux $\nu = 0$, avec le jeu de données $\frac{g}{L} = 3$ et les conditions initiales $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ et $\theta'_0 = 0$ on obtient





3.2 Problème de Cauchy

Pour résoudre numériquement une E.D.O., nous allons la réécrire sous une forme plus *générique* : le problème de Cauchy. De très nombreux résultats mathématiques existent sur les problèmes de Cauchy. Nous ne ferons que rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz (19ème siècle). L'ensemble des méthodes numériques que nous allons étudier auront pour but la résolution d'un problème de Cauchy quelconque. Elles pourront donc être utilisées (sans efforts) pour la résolution d'une très grande variété d'E.D.O.

On commence par donner la définition d'un problème de Cauchy :

♥ Définition 3.5: problème de Cauchy



Soit f l'application continue définie par

$$\begin{aligned} f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto f(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec $T \in]0, +\infty]$. Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction \mathbf{y} définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \quad (3.9)$$



Exercice 3.2.1

Quelles sont les données du problème de Cauchy (3.8)-(3.9)?

Dans de nombreux cas, la variable t représente le temps et les composantes du vecteur \mathbf{y} , une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation différentielle (3.8) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré.

En général, il est impossible de trouver analytiquement des solutions à ces problèmes. Il faut alors construire des méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées. Toutefois, il serait bon de vérifier l'existence et l'unicité d'une solution.

Par exemple, le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \text{si } t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy avec $t^0 = 0, T = +\infty, m = 1, \mathbf{y}^{[0]} = 0$ et

$$\mathbf{f} : \begin{matrix} [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, v) & \longmapsto & \sqrt[3]{v} \end{matrix}.$$

Ce problème admet les **trois solutions** suivantes : $y(t) = 0, y(t) = \sqrt{8t^3/27}$ et $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$.

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité sous certaines conditions.

 **Théorème 3.6: Cauchy-Lipschitz**

Soit le problème de Cauchy donné par la définition 3.5. On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et quelle est localement lipschitzienne en $\mathbf{y} : \forall (t, \mathbf{y}) \in U, \exists \mathcal{W}$ voisinage $\mathbf{t}, \exists \mathcal{V}$ voisinage $\mathbf{y}, \exists L > 0$ tels que

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \quad \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \tag{3.10}$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy (3.8)-(3.9) admet une unique solution.

 **Proposition 3.7**

Si $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$ est continue et bornée, alors \mathbf{f} satisfait la condition de Lipschitz (3.10) en \mathbf{y} .

 **Exercice 3.2.2**

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

- (a) $\begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v(t) = e, & t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, v'(0) = 0. \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in]0, 10] \\ x(0) = 1, x'(0) = 1. \end{cases}$
- (d) $\begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, y^{(1)}(0) = v_0, y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$

Correction Exercice

(a) C'est une E.D.O. d'ordre 2. Pour écrire le problème de Cauchy associé, on écrit l'E.D.O. sous la forme d'un système de 2 E.D.O. d'ordre 1 (voir Proposition 3.3) en prenant $m = 2$ et en posant

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\alpha x'(t) - \beta \cos(x(t)) + \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\alpha y_2(t) - \beta \cos(y_1(t)) + \sin(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \end{aligned}$$

Le problème de Cauchy associé est donc

trouver la fonction $\mathbf{y} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\mathbf{f} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, \mathbf{z}) \mapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ -\alpha z_2 - \beta \cos(z_1) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

- (b) Pour cette E.D.O. on suppose les paramètres physiques L , C , R_1 et R_2 donnés. C'est une E.D.O. d'ordre 2. Pour écrire le problème de Cauchy associé, on écrit l'E.D.O. sous la forme d'un système de 2 E.D.O. d'ordre 1 (voir Proposition 3.3) en prenant $m = 2$ et en posant

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'(t) \\ \frac{1}{LC} \left(e - \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C \right) v'(t) - \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) v(t) \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e}{LC} - \left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L} \right) y_2(t) - \frac{1}{LC} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Le problème de Cauchy associé est donc

trouver la fonction $\mathbf{y} : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, 100]$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, \mathbf{z}) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{e}{LC} - \left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L} \right) z_2 - \frac{1}{LC} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- (c) Pour cette E.D.O. on suppose le paramètre μ donné. C'est une E.D.O. d'ordre 2. Pour écrire le problème de Cauchy associé, on écrit l'E.D.O. sous la forme d'un système de 2 E.D.O. d'ordre 1 (voir Proposition 3.3) en prenant $m = 2$ et en posant

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \mu(1 - y_1^2(t))y_2(t) - y_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Le problème de Cauchy associé est donc

trouver la fonction $\mathbf{y} : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, 10]$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\mathbf{f} : [0, 10] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, \mathbf{z}) \mapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu(1 - z_1^2)z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

- (d) Pour cette E.D.O. on suppose les paramètres T , u_0 , v_0 et w_0 donnés. C'est une E.D.O. d'ordre 3. Pour écrire le problème de Cauchy associé, on écrit l'E.D.O. sous la forme d'un système de 3 E.D.O. d'ordre 1 (voir Proposition 3.3) en prenant $m = 3$ et en posant

$$\mathbf{Y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

On a noté ici \mathbf{Y} au lieu de \mathbf{y} pour éviter les confusions! On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ y^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \cos(t)y^{(2)}(t) - 2\sin(t)y^{(1)}(t) + y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ Y_3(t) \\ \cos(t)Y_3(t) - 2\sin(t)Y_2(t) + Y_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}(t)) \end{aligned}$$

Le problème de Cauchy associé est donc

<p>trouver la fonction $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant</p> $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T]$ $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ <p>avec</p> $\mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(t, \mathbf{z}) \mapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \cos(t)z_3 - 2\sin(t)z_2 + z_1 \end{pmatrix}$

◇

3.3 Différences finies pour les E.D.O.

3.3.1 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension $m = 1$

On veut résoudre numériquement le problème de Cauchy (3.8)-(3.9) en utilisant les différences finies progressive, rétrograde ou centrée.

On note $t^n = t^0 + nh$, $n \in \{0, \dots, N\}$ une **discrétisation régulière** de $[t^0, t^0 + T]$ avec $h = T/N$ le **pas de temps**. On a

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

ce qui entraîne

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (3.11)$$

En utilisant la formule des différences finies progressive, on a $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\exists \eta_n \in [t^n, t^{n+1}]$ tels que

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} y''(\eta_n)$$

ou encore

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y''(\eta_n).$$

On note $y^{[n]}$ une approximation de $y(t^n)$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (3.12)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $y^{[n+1]}$ en fonction de $y^{[n]}$.

De la même manière, la méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce schéma est **implicite**, car $y^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $y^{[n]}$. Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

Exercice 3.3.1

On veut résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}) suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{(n+1)} &= y^{(n)} + hf(t^n, y^{(n)}), \\ y^{(0)} &\text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{(n)}$ et la fonction y , ...

Q. 2 Soit a, b , $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction DISREG retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.

Q. 3 Ecrire une fonction REDEP retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{(n)})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.

Q. 4 Ecrire un algorithme complet de résolution de (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif.

Exemple

Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) + t^2 y^2(t), \quad \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) &= -1 \end{cases}$$

de solution exacte

$$y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2).$$

Les résolutions numériques avec les schémas d'Euler progressif et rétrograde sont représentés en figure 3.4.

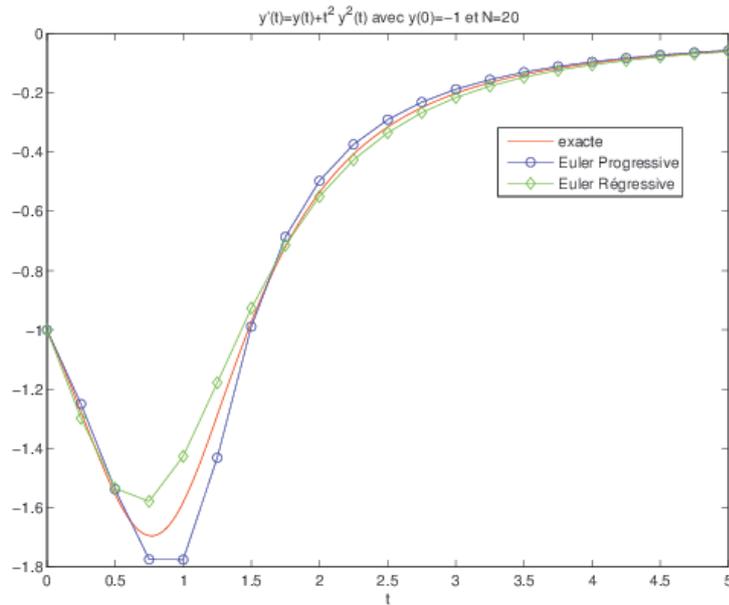


Figure 3.4: résolutions avec Euler progressif et rétrograde

3.3.2 Stabilité

Pour illustrer la notion de stabilité (absolue) d'un schéma numérique, on étudie le problème modèle suivant :

Soit $\lambda < 0$, Soit l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $\lambda < 0$ est donné. La solution exacte est

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}.$$

En particulier, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

♥ Définition 3.8

On pose $t^n = nh$, où le pas de temps $h > 0$ est donné et $y^{[n]}$ une approximation de $y(t^n)$ par un schéma donné. On dit alors que le schéma associé à ce problème est absolument stable si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y^{[n]} = 0.$$

Ce n'est malheureusement pas toujours le cas comme illustré en figure 3.5 avec le schéma d'Euler progressif et $h = \frac{20}{19} \approx 1.05$. Par contre, avec $h = \frac{20}{21} \approx 0.95$, le même schéma est stable (voir figure 3.6).

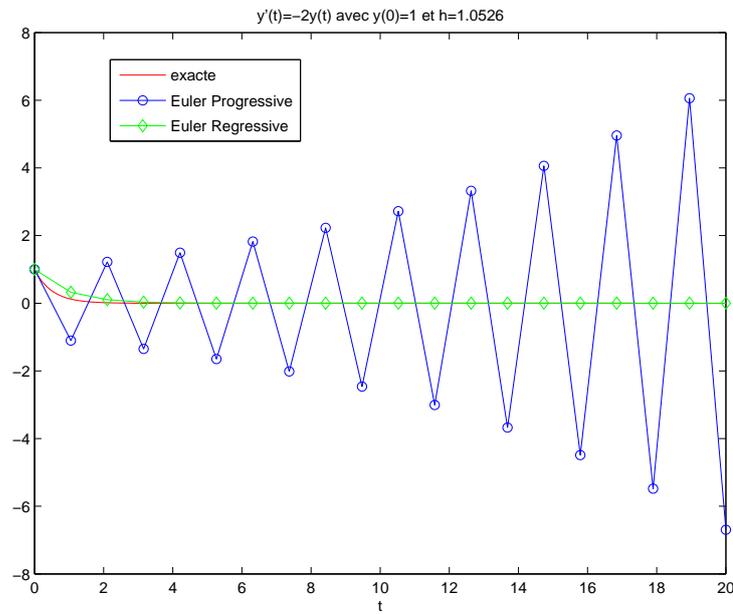


Figure 3.5: Instabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde

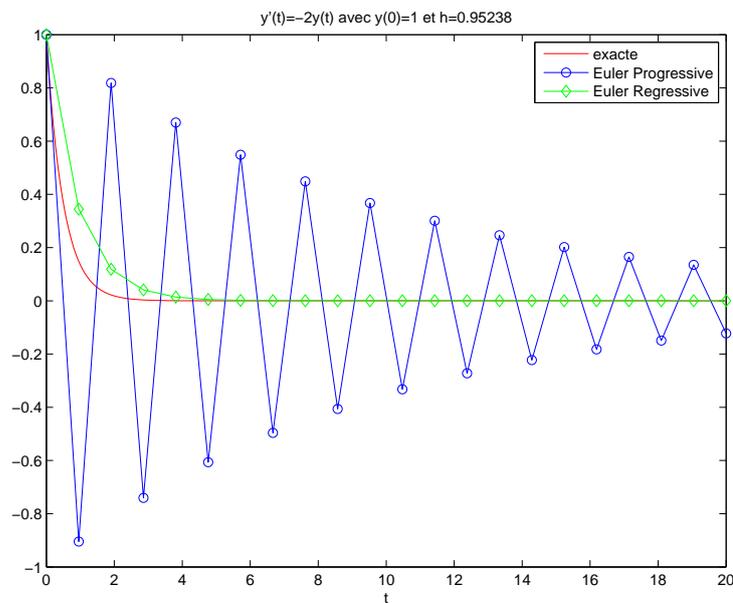


Figure 3.6: Stabilité Euler progressif - Stabilité Euler rétrograde

Pour comprendre ce phénomène, on écrit le schéma d'Euler progressif :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}) = y^{[n]} + \lambda h y^{[n]} = (1 + \lambda h)y^{[n]}$$

d'où

$$y^{[n]} = (1 + \lambda h)^n y^{[0]}, \quad \forall n \geq 0.$$

On remarque alors que si $|1 + \lambda h| > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y^{[n]}| = +\infty$, le schéma d'Euler progressif est alors instable. Pour assurer la stabilité, il faut ici imposer une condition sur h :

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \text{d'où} \quad 0 < h < -\frac{2}{\lambda}.$$

On dit alors que le schéma d'Euler progressif est **conditionnellement stable**.

De la même manière, pour le schéma d'Euler rétrograde on obtient

$$y^{[n+1]} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right) y^{[n]} =$$

et donc

$$y^{[n]} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right)^n y^{[0]}, \quad \forall n \geq 0.$$

Dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} y^{[n]} = 0$ sans condition : on dit que le schéma d'Euler rétrograde est **inconditionnellement stable**.

3.3.3 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension m

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La fonction \mathbf{f} étant définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{z}) &\longmapsto \mathbf{w} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{z}) \\ \vdots \\ f_d(t, \mathbf{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{y}(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, \mathbf{y}(t)) \end{pmatrix}$$

le problème de Cauchy peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} y_1'(t) &= f_1(t, \mathbf{y}(t)), \\ \vdots & \\ y_d'(t) &= f_d(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \text{avec} & \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Après discrétisation et utilisation de la formule des différences finies progressive on obtient

$$\begin{cases} y_1^{[n+1]} &= y_1^{[n]} + h f_1(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \vdots & \\ y_d^{[n+1]} &= y_d^{[n]} + h f_d(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \text{avec} & \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

où $\mathbf{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_d^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}^{[n]} \approx \mathbf{y}(t^n)$.

On obtient alors la méthode d'**Euler progressive** sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (3.14)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $\mathbf{y}^{[n+1]}$ en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

De la même manière, la méthode d'**Euler régressive** sous forme vectorielle est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce schéma est **implicite**, car $\mathbf{y}^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

3.4 Méthode à un pas ou à pas séparés

Pour simplifier on prend $h = h_n$ (pas constant)

3.4.1 Schéma général

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (3.16)$$

Pour la méthode d'Euler, la fonction $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$ est $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

3.4.2 Convergence

La méthode converge sur l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ si, pour la suite des $\mathbf{y}^{[n]}$ calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas h diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n)\| = 0$$

3.4.3 Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur $\mathbf{y}^{[0]}$ ou Φ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas h .

Souvent, lorsque la méthode n'est pas stable, l'amplification des erreurs est exponentielle et, au bout de quelques calculs, les résultats entraînent des dépassements de capacité.

Théorème 3.9

Si $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$ vérifie la condition de Lipschitz en \mathbf{y} alors la méthode est stable.

3.4.4 Consistance

Le schéma de calcul (3.16) est consistant avec l'équation différentielle si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Théorème 3.10

Le schéma est consistant si $\Phi(t, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Théorème 3.11

Si la méthode est stable et consistante, alors elle converge pour n'importe quelle valeur initiale.

3.4.5 Ordre

La méthode itérative est d'ordre p si pour toute solution:

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| \leq Ch^p$$

3.5 Méthode de Runge-Kutta

3.5.1 Principe

Pour simplifier, on suppose $h_n = h$. L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation (??) sur $[t^n, t^{n+1}]$ et de calculer:

$$\mathbf{y}(t^{n+1}) = \mathbf{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à q points intermédiaires $t^{n,i+1} = t^n + h_i$ pour calculer l'intégrale.

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3.17)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}q, q(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$

Remarque 3.12 1. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{i,j}.$$

2. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

3. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

4. Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice \mathbb{B} est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad j \geq i, \quad b_{i,j} = 0.$$

5. Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si \mathbf{f} est contractante en \mathbf{y} .

3.5.2 Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1 - \alpha & \alpha \end{array} \quad (3.18)$$

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = (1 - \alpha) \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \alpha \mathbf{f} \left(t + \frac{h}{2\alpha}, \mathbf{y} + \frac{h}{2\alpha} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \right)$$

- Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient la **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f} \left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \right).$$

- Avec $\alpha = 1$, on obtient la **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu**:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Exercice 3.5.1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDHEUNVEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de \mathbf{f}).

Pour des valeurs plus élevées de p , ces méthodes sont plus précises que la méthode d'Euler, et d'autant plus que p augmente. On se limite dans la pratique à $p = 4$. Cette méthode est connue sous le nom de *Runge-Kutta 4*. Remarquons que dans ces méthodes le pas peut être adapté à chaque étape.

3.5.3 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (3.19)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Exercice 3.5.2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDRK4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4).

3.6 Méthodes à pas multiples

3.6.1 Exemple : schéma de point milieu

Considérons la méthode à deux pas définie par la récurrence:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + 2h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}). \quad (3.21)$$

Cette méthode est d'ordre 2.

De manière évidente, ces méthodes à pas multiples posent des problèmes de démarrage: ici, on ne peut calculer directement $\mathbf{y}^{[1]}$. Les premières valeurs doivent être calculées par un autre schéma.

3.6.2 Le principe

Dans tous les schémas présentés, la valeur de $\mathbf{y}^{[n+1]}$ était déterminée à chaque pas de façon explicite en fonction uniquement du point $\mathbf{y}^{[n]}$. On peut tenir compte de plusieurs valeurs $\mathbf{y}^{[i]}$ précédemment calculées et ainsi travailler sur un nombre de pas multiples.

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(t^{n+i}, \mathbf{y}^{[n+i]}) \quad (3.22)$$

où k est le nombre de pas, $\alpha_k \neq 0$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.

Remarque 3.13 Si $\beta_k = 0$ le schéma est explicite, sinon il est implicite.

Definition 3.14: ordre

Soit y la solution du problème de Cauchy (??)-?? et $\mathbf{y}^{[n+k]}$ la valeur obtenue par le schéma (3.22) en prenant $\mathbf{y}^{[n+i]} = \mathbf{y}(t^{n+i})$, $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \mathbf{y}(t^{n+k}) - \mathbf{y}^{[n+k]}.$$

Le schéma (3.22) est d'ordre p si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Théorème 3.15

Un schéma à pas multiple de type (3.22) est d'ordre p si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket. \end{aligned}$$

Propriété 3.16: Stabilité

Soit P le polynôme défini par $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i$.

Une méthode à pas multiple est **stable**, si

1. toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1,
2. une racine de module égal à 1 est une racine simple de P .

Pour le schéma (3.21), on a $k = 2$ et

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $P(\lambda) = -1 + \lambda^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$: le schéma (3.21) est stable.

Théorème 3.17: Convergence

On suppose que les k valeurs initiales vérifient,

$$\|\mathbf{y}(t^i) - \mathbf{y}^{[i]}\| \leq C_0 h^p, \quad \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Si le schéma (3.22) est d'ordre p et stable, alors il est convergent d'ordre p :

$$\|\mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]}\| \leq Ch^p, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Pour obtenir, à partir d'un schéma à k pas, un schéma d'ordre p il faut obligatoirement initialiser les k premières valeurs à l'aide d'un schéma d'ordre p au moins.

3.6.3 Méthodes d'Adams-Bashforth

On note $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]}). \quad (3.23)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} (23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]}). \quad (3.24)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]}). \quad (3.25)$$

Ces schémas sont **explicites** et leur ordre correspond au nombre de pas.

Exercice 3.6.1

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]}).$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique REDAB4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode.*

3.6.4 Méthodes d'Adams-Moulton

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} (\mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]}). \quad (3.26)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} (5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]}). \quad (3.27)$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]}). \quad (3.28)$$

Ces schémas sont **implicites** et leur ordre correspond au nombre de pas plus un.

3.6.5 Schéma prédicteur-correcteur

Principe

Il s'agit là d'une des méthodes les plus employées. Une méthode de prédiction-correction procède en deux temps: on fournit explicitement une valeur approchée de la solution au $n^{\text{ième}}$ pas (soit $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$), puis on calcule la valeur correspondante de \mathbf{f} (soit $\bar{\mathbf{f}}^{[n+1]}$) et enfin, on substitue cette valeur dans un schéma implicite (on obtient alors une valeur *corrigée*).

pour n variant de 0 à $N - 1$ faire
 Calculer une valeur approchée $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$ par un schéma explicite;
 Evaluer $\bar{\mathbf{f}}^{[n+1]} = \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]})$;
 $\mathbf{y}^{[n+1]}$ à l'aide d'un schéma implicite en remplaçant l'inconnue par $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$;
 finpour

Exemple

Choisissons la méthode d'Euler explicite pour prédicteur et la méthode implicite des trapèzes comme correcteur.

Euler explicite : $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

Trapèze implicite : $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}))$

On obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}); \\ \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}^{[n]}; \\ \bar{\mathbf{f}}^{[n+1]} &= \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}); \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\bar{\mathbf{f}}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]}) \end{cases}$$

Remarque 3.18 On retrouve ici, pour ce cas simple, une formule de Runge-Kutta 2.

En pratique, on peut utiliser un schéma d'Adams explicite (??) pour la prédiction et un autre implicite (??) pour la correction.



Exercice 3.6.2

On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]})$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]})$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique REDPRECOR4VEC permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas.

Remarque 3.19 1. La stabilité du prédicteur intervient peu.

2. Le choix du pas dans ces méthodes est un problème difficile.

Comparaison avec Runge-Kutta

L'intérêt d'une méthode de résolution numérique d'équations différentielles se mesure principalement suivant deux critères:

- son coût pour obtenir une précision donnée (c'est à dire le nombre d'évaluations de fonctions par étapes).
- sa stabilité.

La caractéristique des méthodes de Runge-Kutta est que le pas est assez facile à adapter, la mise en oeuvre informatique plus aisée. Mais pour des méthodes du même ordre de consistance, les méthodes de Runge-Kutta exigent plus d'évaluations de fonctions. Quand on sait que la solution de l'équation n'est pas sujette à de brusques variations de la dérivée, on prendra une méthode de type prédicteur-correcteur mais, si le pas doit être adapté plus précisément, on préférera une méthode de Runge-Kutta.

Chapitre 4

Introduction à la résolution d'E.D.P.

Liste des algorithmes

1.1	Exemple de boucle «pour»	3
1.2	Exemple de boucle «tant que»	4
1.3	Exemple de boucle «répéter ...jusqu'à»	4
1.4	Exemple d'instructions conditionnelle «si»	4
1.5	Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$	5
1.6	Calcul de $S = \sum_{k=1}^n k \sin(2kx)$	7
1.7	Calcul de $P = \prod_{n=1}^k \sin(2kz/n)^k$	8
1.8	En-tête de la fonction SFT retournant valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice 1.2.3.	8
1.9	Fonction SFT retournant la valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice ??	9