Méthodes numériques II (cours 1 et 2)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

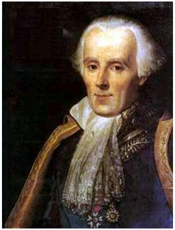
2016/02/06

Part IV

Résolution numérique des E.D.P.

Plan

Equation de Laplace et équation de Poisson



Pierre-Simon Laplace 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français

Siméon Denis Poisson 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
Equation de Laplace si $f = 0$, sinon équation de Poisson.

Conditions aux limites

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,

$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \tag{2}$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \tag{3}$$

  où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad}\, u, \boldsymbol{n} \rangle$ avec $\boldsymbol{n}$ normale exterieure unitaire à Ω

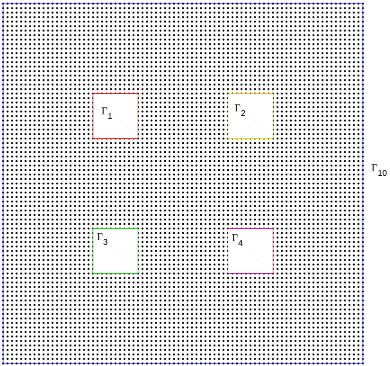
- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \tag{4}$$

Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

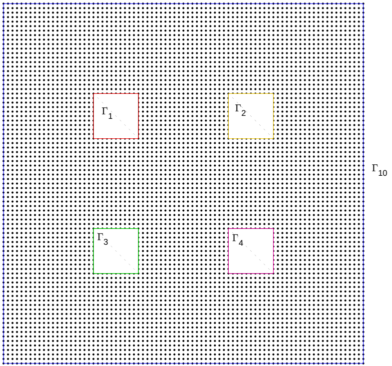
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \end{aligned}$$

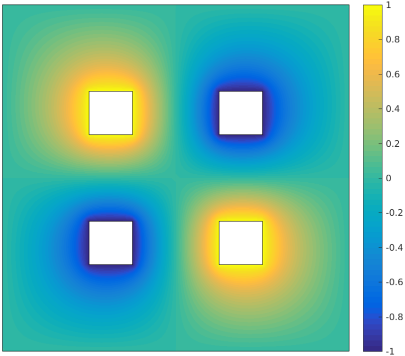


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
u &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\
u &= -1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= 1 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4,
\end{aligned}
$$

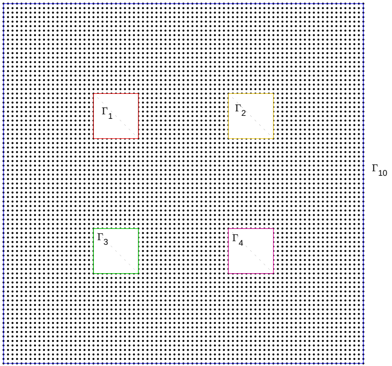


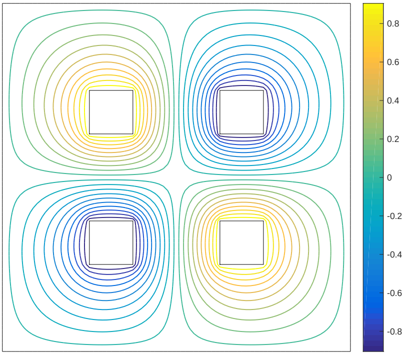


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \end{aligned}$$

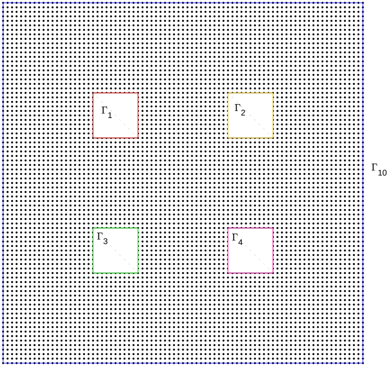




Champ de vitesses en 2D :$V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

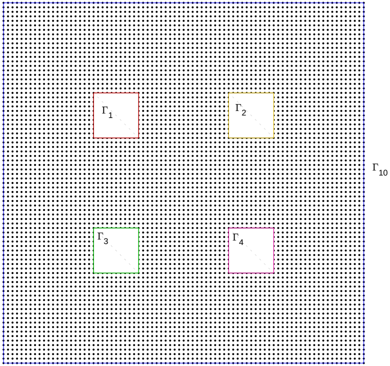
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$

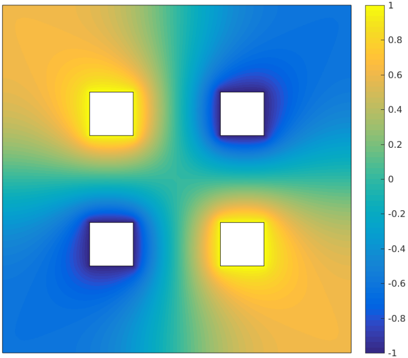


Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$

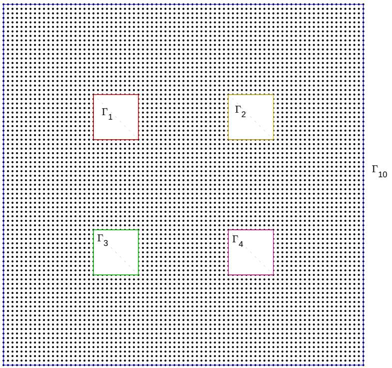


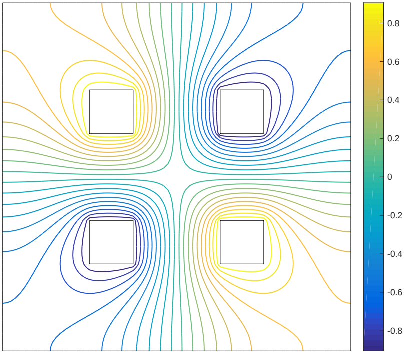


Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \ \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \ \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$





Problème mal posé

Problème en dimension n

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \ \text{ solution} \quad \Rightarrow \quad u + \text{constante solution}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0, T] \tag{5}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D, coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f, production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ, masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c, chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{5}$$

Problème bien posé :

- **condition initiale**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

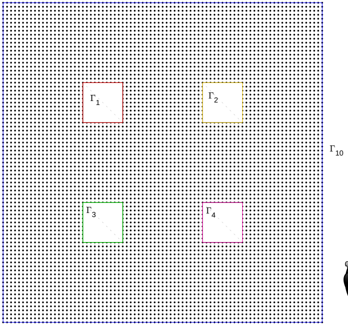
Problème de chaleur en 2D

Find $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u &= 0 \;\text{ in } [0,T]\times\Omega,\\
u(0,\boldsymbol{x}) &= 20 \;\forall \boldsymbol{x}\in\Omega,\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \;\text{ on } \Gamma_{10},\\
u &= g_1 \;\text{ on } \Gamma_2\cup\Gamma 3,\\
u &= g_2 \;\text{ on } \Gamma_1\cup\Gamma 4,
\end{aligned}$$

où Ω (cotés de $20cm$)

- $D = 98.8\times 10^{-6}$ (aluminium) ou $D = 23.9\times 10^{-6}$ (plomb),
- $\forall \boldsymbol{x}\in\Gamma_2\cup\Gamma 3$, $g_1(t,\boldsymbol{x}) = (20+40t)$ si $t <= 1$ et $g_1(t,\boldsymbol{x}) = 60$ sinon,
- $\forall \boldsymbol{x}\in\Gamma_1\cup\Gamma 4$, $g_2(t,\boldsymbol{x}) = (20+80t)$ si $t <= 1$ et $g_2(t,\boldsymbol{x}) = 100$ sinon.



Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0, T] \tag{9}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{x}) - c^2 \Delta u(t, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \in [0, T]$$

- **conditions initiales**

$$\begin{aligned} u(0, \boldsymbol{x}) &= u_0(\boldsymbol{x}), & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ &\textbf{[position initiale]} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \boldsymbol{x}) &= v_0(\boldsymbol{x}), & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ &\textbf{[vitesse initiale]} \end{aligned}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T], \qquad u(t, \boldsymbol{x}) = g_D(t, \boldsymbol{x})$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x})$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) + \alpha u(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x})$$

Plan

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- **méthode des éléments finis**
- **méthode des volumes finis**

Plan

Opérateurs aux différences finies

Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(D_h^+ \varphi)(x) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(x+h) - \varphi(x) \right) && (10) \\
(D_h^- \varphi)(x) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(x) - \varphi(x-h) \right) && (11) \\
(D_h^0 \varphi)(x) &= \frac{1}{2h} \left(\varphi(x+h) - \varphi(x-h) \right) && (12)
\end{aligned}
$$

- D_h^+ **opérateur progressif/décentré avancé**
- D_h^- **opérateur rétrograde/décentré retardé**
- D_h^0 **opérateur centré**

Definition 3.1

Soit $h > 0$. On dit qu'un opérateur aux différences finies D_h est une approximation consistante d'ordre p de $\frac{d^k\varphi}{dx^k}$ si pour tout $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière on a

$$\max_{x\in[a,b]} \left| (D_h\varphi)(x) - \frac{d^k\varphi}{dx^k}(x) \right| \leqslant Ch^p, \tag{13}$$

où C est une constante indépendante de h.

Proposition 3.2

Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs D_h^+ et D_h^- sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}$ et l'opérateur D_h^0 est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Exercise 3.1

Soient $h >$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant

$$\begin{aligned}
(D_h^+\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x)\right)\\
(D_h^-\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x)-\varphi(x-h)\right)\\
(D_h^0\varphi)(x) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x-h)\right)
\end{aligned}$$

Q.1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $D_h(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda D_h\varphi+\mu D_h\psi$.*)*

Q.2 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* D_h^+ *et* D_h^- *sont des approximations consistantes d'ordre* 1 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Q.3 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* D_h^0 *est une approximation consistante d'ordre* 2 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Proposition 3.3

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$. On note D_h^2 l'opérateur défini, pour tout $x \in]a,b[$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in [a,b]$, par

$$(D_h^2 \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2}\left[\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)\right]. \tag{14}$$

Alors $D_h^2\varphi$ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.
De plus on a

$$D_h^2\varphi = D_{\frac{h}{2}}^0(D_{\frac{h}{2}}^0\varphi) = D_h^+(D_h^-\varphi) = D_h^-(D_h^+\varphi) \tag{15}$$

est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.

Démonstration en exercice

Proposition 3.4: (admis)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ alors $\forall \boldsymbol{x} \in U$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]} \in U$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel quel

$$f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(\boldsymbol{x}) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(\boldsymbol{x} + \theta h\boldsymbol{e}^{[i]}) \quad (16)$$

où $\boldsymbol{e}^{[i]}$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Opérateurs aux différences finies en dimension $n > 1$

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{aligned}
(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\right) \\
(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right) \\
(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right)
\end{aligned}
$$

Exercise 3.2

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $h > 0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant définis pour $i \in [\![1, 2]\!]$

$$
\begin{aligned}
(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\right) \\
(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right) \\
(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right)
\end{aligned}
$$

avec $\boldsymbol{e}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q.1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_{h,i}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D_{h,i}\varphi + \mu D_{h,i}\psi$.*)*

Q.2 *On suppose que* $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *avec* $k \geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* $D^+_{h,i}$ *et* $D^-_{h,i}$ *sont des approximations consistantes d'ordre 1 de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Q.3 *On suppose que* $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *avec* $k \geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* $D^0_{h,i}$ *est une approximation consistante d'ordre 2 de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Proposition 3.5

Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs $D^+_{h,i}$ et $D^-_{h,i}$ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ et l'opérateur $D^0_{h,i}$ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Proposition 3.6

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi \in \mathcal{C}^4(U \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On note $D^2_{h,i}$ l'opérateur défini, pour tout $\boldsymbol{x} \in U$ et $h > 0$ vérifiant $\boldsymbol{x} \pm h\boldsymbol{e}^{[i]} \in U$, par

$$(D^2_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2}\left[\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - 2\varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right] \tag{17}$$

Alors $D^2_{h,i}\varphi$ est approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$.
De plus, on a

$$D^2_{h,i}\varphi = D^0_{\frac{h}{2},i}(D^0_{\frac{h}{2},i}\varphi) = D^+_{h,i}(D^-_{h,i}\varphi) = D^-_{h,i}(D^+_{h,i}\varphi). \tag{18}$$

Plan

Soient $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (19)\\ u(a) &= \alpha, && (20)\\ u(b) &= \beta. && (21) \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, && (22)\\ u(a) &= \alpha, && (23)\\ u(b) &= \beta. && (24) \end{aligned}$$

Chercher u ou $u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a,b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in [\![0, N]\!], \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (25) \\ u(x_0) &= \alpha, && (26) \\ u(x_N) &= \beta. && (27) \end{aligned}$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{28}$$

$$u(x_0) = \alpha, \tag{29}$$

$$u(x_N) = \beta. \tag{30}$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned}
-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\
u(x_0) &= \alpha, \\
u(x_N) &= \beta.
\end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned}
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (31)\\
u_0 &= \alpha, && (32)\\
u_N &= \beta. && (33)
\end{aligned}$$

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{31}$$

$$u_0 = \alpha, \tag{32}$$

$$u_N = \beta. \tag{33}$$

système linéaire de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues !

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ & \vdots & & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array}\right.$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$
\begin{cases}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\
\hline
u_1 \\
u_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
\hline
u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
h^2 f(x_1) \\
h^2 f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
h^2 f(x_{N-2}) \\
h^2 f(x_{N-1}) \\
\hline
\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{34}
$$

Proposition 4.1: admis

Le schéma aux différences finies (31)-(33) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (19)-(21) et on a

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{35}$$

Exercise 4.1: (schéma étudié en cours)

Q.1 *Ecrire la fonction* ASSEMBLEMAT1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{36}$$

où α, β et γ sont des réels donnés.
On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Q.2 *En prenant le jeu de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire un programme permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$* SOLVE$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*
Q.3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (35).*

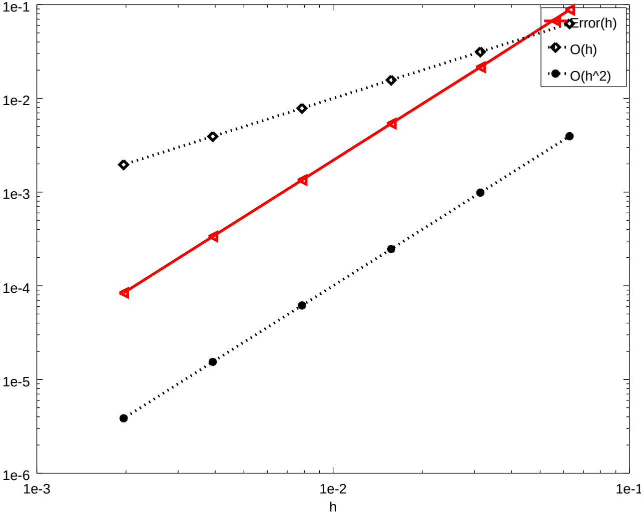


Figure : Représentation en échelle logarithmique

```
function M=AssembleMat1D(d,alpha,beta,gamma)
  M=sparse(d,d);
  M(1,1)=gamma;M(d,d)=gamma;
  for i=2:d-1
    M(i,i)=alpha;
    M(i,i-1)=beta;M(i,i+1)=beta;
  end
end
```

Listing 1 : fonction Matlab/Octave `AssembleMat1D`

```
function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alpha,beta,f,N)
  h=(b-a)/N;
  x=a:h:b;
  A=AssembleMat1D(N+1,2+c*h*h,-1,h*h);
  B=zeros(N+1,1);
  B(1)=alpha;B(N+1)=beta;
  for i=2:N
    B(i)=f(x(i));
  end
  B=h*h*B;
  U=A\B;
end
```

Listing 2 : fonction Matlab/Octave `solveEDP1`

```
clear all
close all
% Initialisation des donnees
uex=@(x) sin(x.^2);
c=1;
f=@(x) 4*x^2*sin(x^2) - 2*cos(x^2) + c*sin(x^2);
a=0;b=2*pi;
% Calcul des erreurs
LN=[100,200,400,800,1600,3200];
k=1;
for N=LN
  [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(a),uex(b),f,N);
  H(k)=(b-a)/N;
  E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
  k=k+1;
end
% Representation graphique
loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
hold on
loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
loglog(H,H.^2,'k*:','LineWidth',2)
legend('Error(h)','O(h)','O(h^2)')
xlabel('h')
```

Listing 3 : Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a, b[, \tag{37}$$

$$u(a) = \alpha, \tag{38}$$

$$u'(b) = \beta. \tag{39}$$

Seule la dernière du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a,b[, & (37)\\ u(a) &= \alpha, & (38)\\ u'(b) &= \beta. & (39) \end{aligned}$$

Seule la dernière du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, & (37)\\ u(a) &= \alpha, & (38)\\ u'(b) &= \beta. & (39) \end{aligned}$$

Seule la dernière du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

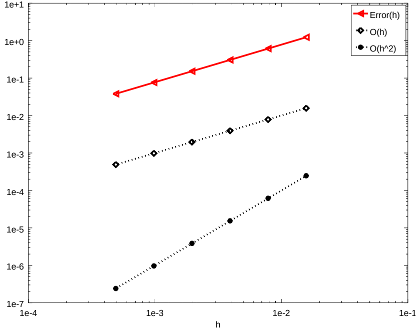
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta.$$

$$
\begin{cases}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N - u_{N-1} & = & h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

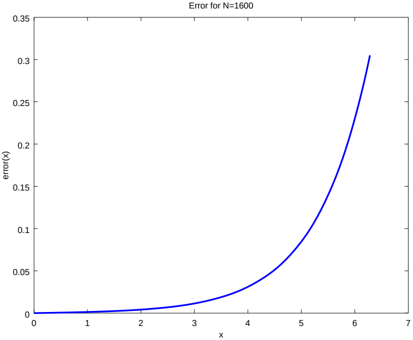
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\ \hline h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \hline h\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (40)
$$

Mais ...

Schéma d'ordre 1 !!!



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann

Exercise 4.2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q.1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{41}$$

Q.2 *Montrer que*

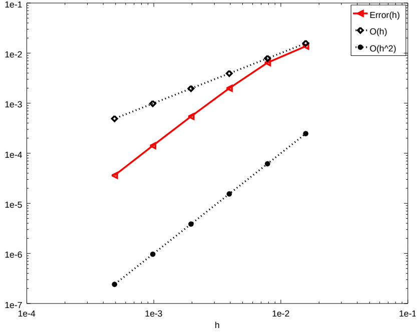
$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{42}$$

$$
\begin{cases}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} & = & 2h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

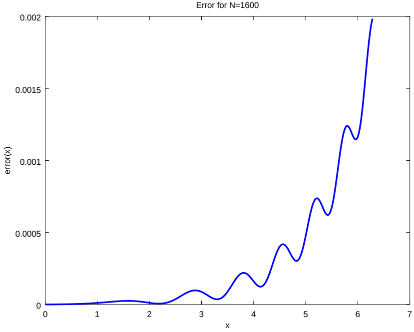
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -4 & 3
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\ \hline h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \hline 2h\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (43)
$$

et ...

Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Exercise 4.3

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x),\ \forall x \in]a;b[, \quad (44)$$
$$u'(a) = \alpha, \quad (45)$$
$$u(b) = \beta. \quad (46)$$

Q.1

1. *Quelles sont les données du problème (44) à (46)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
2. *Quelles sont les inconnues du problème (44) à (46)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q.2 *Construire une discrétisation régulière de $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.* On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (44) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (47)$$

Q.3

1. *Expliquer comment le schéma (47) a été obtenu à partir de (44) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*
2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (44).*
3. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q.4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \quad (48)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q.5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (44) à (46) basé sur (48). (Utiliser au maximum les fonctions)*