

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.O.

## 1 Problèmes de Cauchy

### EXERCICE 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

- (a) 
$$\begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in ]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, & x'(0) = 1. \end{cases}$$
- (b) 
$$\begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v(t) = e, & t \in ]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$$
- (c) 
$$\begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in ]0, 10] \\ x(0) = 1, & x'(0) = 1. \end{cases}$$
- (d) 
$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in ]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

### EXERCICE 2

Soit  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  deux fonctions vectorielles définies  $[0, T]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  représentant la position au cours du temps de deux objets dans l'espace.

On note  $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

On suppose que  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont solutions du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}(t) = -gM_p \frac{\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)}{\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)\|^3} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}(t) = -gM_q \frac{\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)}{\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\|^3} \quad (2.2)$$

avec comme positions initiales  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^3$ , et comme vitesses initiales  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}(0) = \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3$ ,  $\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = \mathbf{v}_q \in \mathbb{R}^3$ .

Écrire ce système différentiel sous la forme d'un problème de Cauchy.

## 2 Dérivation numérique

### EXERCICE 3

On note  $t^n = a + nh$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $h = (b - a)/N$  une **discrétisation régulière de  $[a, b]$** . Soit  $(Dy)_n$  une approximation de  $y'(t^n)$ . On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (3.1)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (3.2)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \quad (3.3)$$

**Q. 1** Soit  $y \in C^2([a, b])$ .

1. Montrer qu'il existe  $\xi_P \in [t^n, t^{n+1}]$  et  $\xi_R \in [t^{n-1}, t^n]$  tels que

$$(Dy)_n^P = y'(t^n) + \frac{h}{2} y''(\xi_P)$$

et

$$(Dy)_n^R = y'(t^n) - \frac{h}{2} y''(\xi_R)$$

2. En déduire que

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^P| \leq Ch, \quad \text{avec } C = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y''(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_i^R| \leq Dh, \quad \text{avec } D = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y''(t)|$$

3. Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour les différences finies progressive et régressive. ■

**Q. 2** Soit  $y \in C^3([a, b])$ .

1. Montrer qu'il existe  $\xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]$  et  $\xi_2 \in [t^{n-1}, t^n]$  tels que

$$(Dy)_n^C = y'(t^n) + \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2))$$

2. En déduire que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^C| \leq Eh^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

3. Donner l'ordre de l'erreur de troncature pour la différence finie centrée. ■

## EXERCICE 4

Soit  $f \in C^3([a, b]; \mathbb{R})$ . On note  $t^n$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , une discrétisation **régulière** de  $[a, b]$  de pas  $h$ . On note  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$  le vecteur défini par  $\mathbf{F}_n = f(t^n)$ .

**Q. 1** 1. Connaissant uniquement le vecteur  $\mathbf{F}$ , déterminer un vecteur  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$  vérifiant

$$\mathbf{V}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h).$$

2. Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur  $\mathbf{F}$  et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur  $\mathbf{V}$  précédent. ■

**Q. 2** 1. Connaissant uniquement le vecteur  $\mathbf{F}$ , déterminer un vecteur  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$  vérifiant

$$\mathbf{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2).$$

2. Ecrire une fonction Matlab permettant, à partir du vecteur  $\mathbf{F}$  et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur  $\mathbf{W}$  précédent. ■

### 3 Schémas

#### EXERCICE 5

On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver  $y$  telle que

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \quad (5.1)$$

$$y(0) = 0. \quad (5.2)$$

dont la solution exacte est  $y(t) = \sin(t) + t$ .

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

- Q. 1**
1. Soit  $a, b, a < b$  deux réels. Ecrire une fonction `DISREG` retournant une discrétisation de l'intervalle  $[a; b]$  avec  $N$  pas (constant) de discrétisation.
  2. Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (5.1-5.2) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...
  3. Quel est le lien entre  $y^{[n]}$  et la fonction  $y$ .
  4. Ecrire une fonction `EULERPROG` retournant l'ensemble des couples  $(t^n, y^{[n]})$  calculés par le schéma d'Euler progressif.
  5. Ecrire un algorithme complet de résolution de (5.1-5.2) par le schéma d'Euler progressif. ■

Le schéma d'Euler progressif est d'ordre 1.

- Q. 2**
1. Expliquer comment retrouver numériquement cet ordre (en utilisant la solution exacte de (5.1-5.2)).
  2. Proposer un algorithme mettant en oeuvre cette technique. ■

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

- Q. 3**
1. Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler régressif pour résoudre le problème (5.1-5.2) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...
  2. Ecrire une fonction `EULERREG` retournant l'ensemble des couples  $(t^n, y^{[n]})$  calculés par le schéma d'Euler régressif. On pourra utiliser la fonction `POINTFIXE` de paramètres  $\phi, x_0, \text{tol}, \text{nmax}$  retournant une approximation du point  $x$  tel que  $\phi(x) = x$ . L'algorithme utilisé par cette fonction est une méthode de point fixe avec pour point initial  $x_0$ , une tolérance de  $\text{tol}$ , un nombre maximum d'itération  $\text{nmax}$ .
  3. Ecrire un algorithme complet de résolution de (5.1-5.2) par le schéma d'Euler régressif. ■