Travaux dirigés - E.D.O. 2

1 Différences finies pour les E.D.O.

Exercice 1

On veut résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y^{(n+1)} & = & y^{(n)} + hf(t^n, y^{(n)}), \\ y^{(0)} & & \text{donné.} \end{array} \right.$$

Q. 1 *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{(n)}$ et la fonction y, ...*

Q. 2 *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.*

Q. 3 *Ecrire une fonction* REDEP *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{(n)})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.*

Q. 4 *Ecrire un algorithme complet de résolution de $(\mathcal{P})$ par le schéma d'Euler progressif.*

2 Méthodes à un pas

Exercice 2

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDHeunVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de $\boldsymbol{f}$.*

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*

EXERCICE 3

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\ \hline \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}). \end{array}$$

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.*

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*