TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.O. 3

On supposera les fonctions algorithmiques REDRK2VEC , REDRK3VEC et REDRK4VEC correspondant aux méthodes à un pas de Runge-Kutta respectivement d'ordre 2, 3 et 4, déjà écrites.

1 Méthodes à pas multiples

EXERCICE 1

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} \quad = \quad \boldsymbol{y}^{[n]} + \tfrac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode.*

2 Méthodes de prédiction-correction

EXERCICE 2

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right)$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPRECOR4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction $\boldsymbol{f}$ dans la boucle principale.*

3 Application

EXERCICE 3

On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3.

La masse des ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.

Le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps est donnée par

$$m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}(t) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad (1)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}(t) = k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t). \quad (2)$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements respectifs des blocs m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre au cours du temps (voir figure 2).

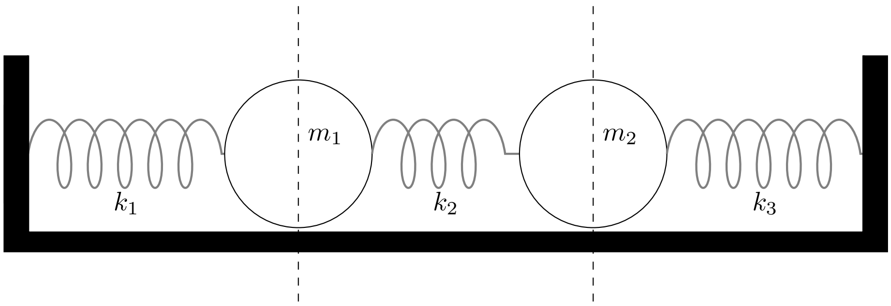

Figure 1: Positions d'équilibre

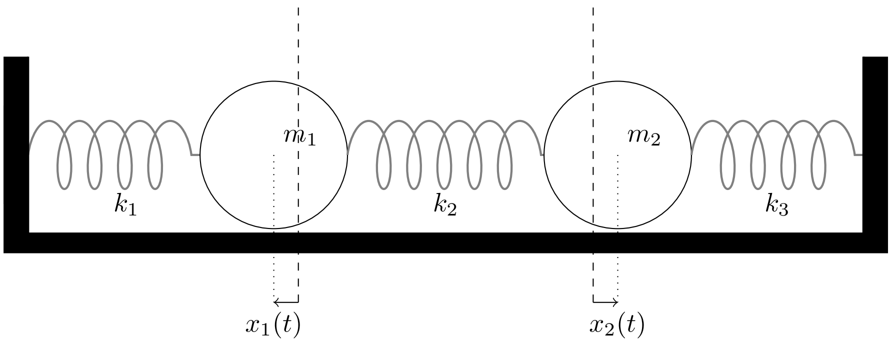

Figure 2: En mouvement

On souhaite résoudre numériquement ce problème pour le cas où :

- le bloc de masse m_1 est en position -0.5 par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial $t = 0$,
- le bloc de masse m_2 est en position $+0.5$ par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial.

Q. 1 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy vectoriel associé à ce problème.*

Q. 2 (Matlab) *Ecrire un programme permettant de résoudre ce problème de Cauchy par un schéma d'ordre 4 et de représenter les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (Utiliser au maximum les fonctions).*