Energétique I **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée **Année 2015-2016**

Travaux dirigés - E.D.P. 1

Exercice 1

Soient $h >$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant

$$\begin{aligned}(D_h^+\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x)\right)\\(D_h^-\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x)-\varphi(x-h)\right)\\(D_h^0\varphi)(x) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x-h)\right)\end{aligned}$$

Q. 1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $D_h(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda D_h\varphi+\mu D_h\psi$.*)*

Q. 2 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* D_h^+ *et* D_h^- *sont des approximations consistantes d'ordre* 1 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Q. 3 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* D_h^0 *est une approximation consistante d'ordre* 2 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Exercice 2

Soient $\varphi:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $h>0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant définis pour $i\in[\![1,2]\!]$

$$\begin{aligned}(D_{h,i}^+\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}^{[i]})-\varphi(\boldsymbol{x})\right)\\(D_{h,i}^-\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}-h\boldsymbol{e}^{[i]})\right)\\(D_{h,i}^0\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}^{[i]})-\varphi(\boldsymbol{x}-h\boldsymbol{e}^{[i]})\right)\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{e}^{[1]}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}^{[2]}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Q. 1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varphi:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall\psi:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $D_{h,i}(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda D_{h,i}\varphi+\mu D_{h,i}\psi$.*)*

Q. 2 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k(U\subset\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* $D_{h,i}^+$ *et* $D_{h,i}^-$ *sont des approximations consistantes d'ordre* 1 *de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Q. 3 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k(U\subset\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* $D_{h,i}^0$ *est une approximation consistante d'ordre* 2 *de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Exercice 3

Q. 1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

où α, β *et* γ *sont des réels donnés.*

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a,b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Q. 2 *En prenant le jeu de données* $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ *et* $f : x \mapsto \cos(x^2)$, *écrire un programme permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Q. 3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (**??**).

Exercice 4

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Exercice 5

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[, &(1)\\ u'(a) &= \alpha, &(2)\\ u(b) &= \beta. &(3) \end{aligned}$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites?

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4}$$

Q. 3 *1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*

2. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)*