

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.P. 2

EXERCICE 1

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0; T[\times]a; b[, \quad (1)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t), \quad \forall t \in]0; T]. \quad (3)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (4)$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Q. 1 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

3. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

4. Quelles sont les conditions initiales?

5. Quelles sont les conditions aux limites?

6. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

On note $t^n, n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et $x_i, i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i .

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta u_i^n = f_i^n. \quad (5)$$

$$u_{N_x-2}^n - 4u_{N_x-1}^n + 3u_{N_x}^n = 2\Delta x v_b(t^n). \quad (6)$$

Q. 3 1. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs $u_i^n, f_i^n, \Delta t$ et Δx .

2. Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).

3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6).

4. Le schéma est-il implicite ou explicite?

5. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

On note \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n, \forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

Q. 4 1. Comment initialiser le vecteur \mathbf{U}^0 ?

2. On suppose les données du problème (1) à (3) fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6).

EXERCICE 2

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \beta u(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0; T[\times]a; b[, \quad (1)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t), \quad \forall t \in]0; T]. \quad (3)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (4)$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Q. 1 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

3. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

4. Quelles sont les conditions initiales?

5. Quelles sont les conditions aux limites?

6. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

On note $t^n, n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et $x_i, i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i .

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta u_i^n = f_i^n. \quad (5)$$

$$u_{N_x-2}^n - 4u_{N_x-1}^n + 3u_{N_x}^n = 2\Delta x v_b(t^n). \quad (6)$$

Q. 3 1. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs $u_i^n, f_i^n, \Delta t$ et Δx .

2. Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).

3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6).

4. Le schéma est-il implicite ou explicite?

5. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

On note \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n, \forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

Q. 4 1. Comment initialiser le vecteur \mathbf{U}^0 ?

2. En supposant le vecteur \mathbf{U}^{n-1} déjà calculé, montrer que le vecteur \mathbf{U}^n est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{U}^n = \mathbf{b}^{n-1} \quad (7)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{b}^{n-1} (préciser les dimensions).

Q. 5 1. Ecrire la fonction ASSEMBLEMAT1D retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \nu & \mu & \nu & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \nu & \mu & \nu \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

où μ, ν, c_1, c_2 et c_3 sont des réels donnés.

2. On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ déjà implémentée : $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$.

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6).