Energétique 1ère année **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée **Année 2012-2013**

Examen du 3 septembre 2012

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : E.D.O. [15.75 pts ramené à 12]

Q. 1 1. *Que signifie les abréviations E.D.O.?* [0.25 pts]

2. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy vectoriel.* [0.5 pts] ■

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons nous focaliser sur les méthodes dites de **Prédiction-Correction**.

Q. 2 *Rappeler brièvement le principe générale d'une méthode de* ***Prédiction-Correction****.* [1 pts] ■

Q. 3 (Algo) *Ecrire la fonction algorithmique* REDPC2VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy* ***vectoriel*** *par une méthode de type* ***Prédiction-Correction****, utilisant les deux schémas d'ordre* 2 *suivants*

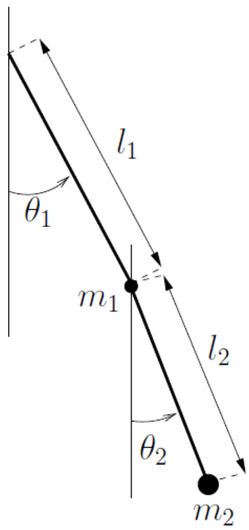
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right) \tag{1}$$

et

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right) \tag{2}$$

[3 pts] ■

A la masse d'un pendule simple, on accroche un second pendule de manière à être dans la configuration suivante :



On peut montrer que les équations du mouvement (sans viscosité) sont données par :

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)l_1\theta_1''(t) + m_2 l_2\theta_2''(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + m_2 l_2(\theta_2'(t))^2\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + (m_1+m_2)g\sin(\theta_1(t)) &= 0\\
l_1\theta_1''(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + l_2\theta_2''(t) - l_1(\theta_1'(t))^2\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + g\sin(\theta_2(t)) &= 0
\end{aligned}$$

où m_1, l_1, m_2 et l_2 sont des constantes données correspondant aux masses et longueurs des pendules.

Q. 4 *Montrer que les deux équations précédentes peuvent se mettre sous la forme*

$$\mathbb{M}(t)\begin{pmatrix}\theta_1''(t)\\ \theta_2''(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix} \tag{3}$$

où

- $\mathbb{M}(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *(matrice* 2×2*) dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, m_1, m_2, l_1, l_2,
- $b_1(t) \in \mathbb{R}$ *dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_2'(t)$, m_1, m_2, l_2,
- $b_2(t) \in \mathbb{R}$ *dépendant uniquement de* $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_1'(t)$, l_1.

On explicitera $\mathbb{M}(t)$, $b_1(t)$ *et* $b_2(t)$. [1 pts] ■

Q. 5 1. *Démontrer que la matrice* $\mathbb{M}(t)$ *est inversible.* [1 pts]

2. *Calculer son inverse.* [1 pts] ■

Q. 6 *Pour simplifier les écritures, on pose*

$$\mathbb{M}^{-1}(t) = \mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix}P_{11}(t) & P_{12}(t)\\ P_{21}(t) & P_{22}(t)\end{pmatrix}.$$

Montrer que ce problème peut se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy que l'on explicitera en fonction de $\mathbb{P}(t)$, $b_1(t)$ *et* $b_2(t)$. [2 pts] ■

Q. 7 (Matlab) 1. *Ecrire la fonction Matlab* fCauchy *associée au problème de Cauchy de la question précédente et correspondant à la fonction de Cauchy.* [2 pts]

2. *Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre numériquement, à l'aide des fonctions* REDPC2Vec *et* fCauchy, *le problème 3 avec conditions initiales.* [3 pts]

3. *Donner la(les) commande(s) permettant de représenter sur une figure les approximations de* θ_1 *et* θ_1' *et sur une autre les approximations de* θ_2 *et* θ_2'. [1 pts] ■

EXERCICE 2 : E.D.P. [13.75 pts ramené à 11]

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[, & (1)\\
u(a) &= \alpha, & (2)\\
u'(b) &= \beta. & (3)
\end{aligned}$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)* [0.5 pts]

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type) [0.25 pts]

3. Quelles sont les conditions initiales? [0.25 pts]

4. Quelles sont les conditions aux limites? [0.25 pts] ■

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.* [0.5 pts] ■

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4}$$

Q. 3 *1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?* [2 pts]

2. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1). [1 pts]

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins. [2 pts]

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. [1 pts] ■

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). [3 pts] ■

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)* [3 pts] ■