1 Algorithmique

Exercice 1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2 * k * x)$$

Exercice 2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} sin(2 * k * z/n)^k$$

Exercice 3

Q. 1. Reprendre les exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

Q. 2. Reprendre les exercices précédents en écrivant "au mieux" une fonction pour chacun d'entre eux.

Exercice 4

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \cdots \right\}.$$

Ecrire la fonction `SFT` permettant de calculer $x_n(t)$.

Exercice 5

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m} \left((u_i + \cos(x)) \sum_{k=1}^{n} (k + (x - i)^2) \right)$$

Q. 1.
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser les types et les dimensions.
2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer y. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p} \left((u_i + \cos(kx)) \prod_{j=1}^{p} (v_k + (x - j)^2) \right), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 2.
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.
2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

2 Dérivation numérique

Exercice 6

Q. 1. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leqslant C_1 h, \quad \text{avec} \;\; C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |\, y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leqslant C_2 h, \quad \text{avec} \; C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |\, y^{(2)}(t)|$$

Q. 2. Soit $y \in \mathcal{C}^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leqslant E h^2, \quad \text{avec} \;\; E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |\, y^{(3)}(t)|$$

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0, N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$.

Q. 1.

1. Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0, N]\!].$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédant.

Q. 2.

1. Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0, N]\!]$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédant.