Travaux dirigés - E.D.O.

1 Problèmes de Cauchy

Exercice 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a) \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), \ t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} LCv''(t) + \left(\dfrac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\dfrac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e, \ t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, \ v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), \ t \in]0, 10] \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t) y^{(2)}(t) + 2\sin(t) y^{(1)}(t) - y(t) = 0, \ t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, \ y^{(1)}(0) = v_0, \ y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux fonctions vectorielles définies $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ représentant la position au cours du temps de deux objets dans l'espace de masses respective M_p et M_q.

On note $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in [0, T]$.

On suppose que $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont solutions du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2}(t) = -gM_p \frac{\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)}{\|\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)\|^3} \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = -gM_q \frac{\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)}{\|\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)\|^3} \tag{2.2}$$

avec comme positions initiales $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^3$, et comme vitesses initiales $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^3$, $\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_q \in \mathbb{R}^3$.

Ecrire ce système différentiel sous la forme d'un problème de Cauchy.

2 Schémas

Exercice 3

On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \tag{3.1}$$

$$y(0) = 0. \tag{3.2}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} \quad \text{donné.} \end{cases}$$