1 Schémas

Exercice 3

On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver y telle que

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \quad (1)$$
$$y(0) = 0. \quad (2)$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{[n]}, y^{[n]}), \\ y^{[0]} & \text{donné}. \end{cases}$$

Q. 1
1. *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.*
2. *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème* (1-2) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*
3. *Quel est le lien entre $y^{[n]}$ et la fonction y.*
4. *Ecrire une fonction* EulerProg *retournant l'ensemble des couples $(t^{[n]}, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.*
5. *Ecrire un algorithme complet de résolution de* (1-2) *par le schéma d'Euler progressif.*

Le schéma d'Euler progressif est d'ordre 1.

Q. 2
1. *Expliquer comment retrouver numériquement cet ordre (en utilisant la solution exacte de* (1-2)*).*
2. *Proposer un algorithme mettant en oeuvre cet technique.*

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{[n+1]}, y^{[n+1]}), \\ y^{[0]} & \text{donné}. \end{cases}$$

Q. 3
1. *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler régressif pour résoudre le problème* (1-2) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*
2. *Ecrire une fonction* EulerReg *retournant l'ensemble des couples $(t^{[n]}, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler régressif. On pourra utiliser la fonction* PointFixe *de paramètres ϕ,* x_0, `tol`, `nmax` *retournant une approximation du point x tel que $\phi(x) = x$. L'algorithme utilisé par cette fonction est une méthode de point fixe avec pour point initial x_0, une tolérance de* `tol`*, un nombre maximum d'itération* `nmax`*.*
3. *Ecrire un algorithme complet de résolution de* (1-2) *par le schéma d'Euler régressif.*

Correction

Q. 1
1. Une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas (constant) de discrétisation est donnée par
$$t^{[n]} = a + nh, \ \forall n \in [\![0, N]\!], \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

Algorithme 1 Fonction DisReg retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$

Données : a, b : deux réels, $a < b$
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$

Fonction $\boldsymbol{t} \leftarrow$ DisReg (a, b, N)
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  Pour $n \leftarrow 0$ **à** N **faire**
    $\boldsymbol{t}(n+1) \leftarrow a + n * h$
  Fin Pour
Fin Fonction

2. On commence par écrire le problème de cauchy associé à $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $t^0 = 0$, $T = 4\pi$, $y_0 = 0$ et

$$f : \begin{array}{ccc} [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, z) & \longmapsto & \cos(t) + 1 \end{array}.$$

Les données du problème de Cauchy sont donc les réels t^0, T, y_0 et la fonction f. L'inconnue est la fonction $y : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy, on utilise le schéma $(\mathcal{S})$ où les données sont celles du problème de Cauchy plus le nombre de discrétisations $N \in \mathbb{N}^*$ On peux alors calculer

- $t^{[n]}$, $n \in [\![0, N]\!]$ qui sont les points de la discrétisation régulière à N intervalles :

$$t^{[n]} = t^0 + nh, \ \forall n \in [\![0, N]\!], \quad \text{avec } h = \frac{T}{N}.$$

- $y^{(n)}$, $n \in [\![0, N]\!]$ déterminés par le schéma $(\mathcal{S})$. On a $y^{[0]} = y^0$, puis on calcule successivement

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^{[n]}, y^{[n]}), \quad \text{pour} \quad i = 0 \text{ à } N - 1$$

3. On a $y^{[n]} \approx y(t^{[n]})$.

4. L'algorithme pour la fonction EulerProg est :

Algorithme 2 Fonction EulerProg : résolution d'un problème de Cauchy scalaire par le schéma d'Euler progressif

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
t^0 : réel, temps initial
T : réel > 0
y^0 : réel, donnée initiale
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$
$\boldsymbol{Y}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{Y}(n) = y^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}] \leftarrow$ EulerProg (f, t^0, T, y^0, N)
  $\boldsymbol{t} \leftarrow$ DisReg$(t^0, t^0 + T, N)$
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  $\boldsymbol{Y}(1) \leftarrow y^0$
  Pour $n \leftarrow 1$ **à** N **faire**
    $\boldsymbol{Y}(n+1) \leftarrow \boldsymbol{Y}(n) + h * f(\boldsymbol{t}(n), \boldsymbol{Y}(n))$
  Fin Pour
Fin Fonction

5. Il faut tout d'abord écrire la fonction fCauchy correspondant à la fonction f:

Algorithme 3 Fonction fCauchy : fonction f du problème de Cauchy associé à $(\mathcal{P})$

Données : t : un réel
z : un réel
Résultat : w : un réel

Fonction $w \leftarrow$ fCauchy (t, y)
  $w \leftarrow \cos(t) + 1$
Fin Fonction

L'algorithme de résolution est :

Algorithme 4 résolution numérique du problème $(\mathcal{P})$

$t^0 \leftarrow 0$
$T \leftarrow 4\pi$
$y^0 \leftarrow 0$
$[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}] \leftarrow \text{REDEP}(fCauchy, t^0, T, y^0, 500)$

Q. 2 Dire que le schéma est d'ordre 1 signifie que l'erreur du schéma se comporte comme un $O(h)$. Pour un h donné (i.e. N donné) l'erreur du schéma est donnée par

$$E(h) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n\in\{0,\dots,N\}} |y^{[n]} - y(t^{[n]})|.$$

Pour le problème (1)-(2), la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$ Vérifier que le schéma est d'ordre 1 revient à vérifier que la fonction $E(h)$ est affine. On va donc la représenter graphiquement en choisissant plusieurs valeurs pour h.

Algorithme 5 vérification de l'ordre du schéma

$T \leftarrow 4\pi$
$y^0 \leftarrow 0$
$yex : t \longrightarrow \sin(t) + t$
$LN \leftarrow 100 : 100 : 1000$
$i \leftarrow 1$
Pour $N \leftarrow LN$ **faire**
  $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}] \leftarrow \text{REDEP}(fCauchy, t^0, T, y^0, N)$
  $H(i) \leftarrow T/N$
  $E(i) \leftarrow \text{MAX}(\text{ABS}(\boldsymbol{Y} - yex(\boldsymbol{t})))$
  $i \leftarrow i + 1$
Fin Pour
Plot(H, E)

Q. 3 1. Le principe général est identique à celui du schéma progressif: mêmes données, inconnues, dimensions. Le seul changement notable est que dans la boucle for il va falloir à chaque itération résoudre un problème de point fixe:

$$y^{[n+1]} = \Phi_n(y^{[n+1]}), \quad \text{avec } \Phi_n(y) = y^{[n]} + f(t^{[n+1]}, y).$$

2. L'algorithme pour la fonction EulerReg est :

Algorithme 6 Fonction EULERREG : résolution d'un problème de Cauchy scalaire par le schéma d'Euler régressif

Données : f : $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
t^0 : réel, temps initial
T : réel > 0
y^0 : réel, donnée initiale
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$
$\boldsymbol{Y}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{Y}(n) = y^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$

```
Fonction [t, Y] ← EulerReg ( f, t⁰, T, y⁰, N )
  t ← DisReg(t⁰, t⁰ + T, N)
  h ← (b − a)/N
  Y(1) ← y⁰
  Pour n ← 1 à N faire
    Phi : y ⟶ Y(n) + h ∗ f(t(n + 1), y)
    Y(n + 1) ← PointFixe (Phi, Y(n), 1e − 8, 1000)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

3. Un algorithme de résolution est :

Algorithme 7 résolution numérique du problème $(\mathcal{P})$

```
t⁰ ← 0
T ← 4π
y⁰ ← 0
[t, Y] ← EulerReg(fCauchy, t⁰, T, y⁰, 500)
```

■

EXERCICE 4

Sous certaines hypothèses, le modèle simplifié du Brusselator peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta+1)X(t) \\ Y'(t) & = & -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{array}\right. \tag{1}$$

Q. 1 *Ecrire un problème de Cauchy associé à ce modèle.*

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{[n]}, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right.$$

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* REDEUPVEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel* $(m > 1)$ *quelconque par la méthode d'Euler progressif.*

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement* (1) *pour* $\alpha = 1$, $\beta = 3.5$, $X(0) = 3$ *et* $Y(0) = 2$. *Ensuite ce programme représentera les approximations de* X *et* Y *au cours du temps.*

Correction

Q. 1 On commence par donner la définition d'un problème de Cauchy :

Definition 1.1: problème de Cauchy ☆☆☆☆☆

Soit $\boldsymbol{f}$ l'application continue définie par

$$\begin{array}{rcccl}\boldsymbol{f} & : & [t^0, t^0+T]\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & (t,\boldsymbol{y}) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\end{array}$$

avec $T \in]0,+\infty[$. Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction $\boldsymbol{y}$ définie par

$$\begin{array}{rcccl}\boldsymbol{y} & : & [t^0, t^0+T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & t & \longmapsto & \boldsymbol{y}(t)\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t)\end{pmatrix}\end{array}$$

continue et dérivable, telle que

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t\in[t^0,t^0+T] \tag{2}$$
$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Dans le problème du Brusselator (1), on a deux équations d'ordre 1 et donc $m=2$.

En posant $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t)\end{pmatrix}$, la fonction de Cauchy s'écrit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [t_0, t_0+T]\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (t,\boldsymbol{y}) & \longmapsto & \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1+\alpha\boldsymbol{y}_1^2\boldsymbol{y}_2 - (\beta+1)\boldsymbol{y}_1 \\ -\alpha\boldsymbol{y}_1^2\boldsymbol{y}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\end{pmatrix}\end{array}$$

Pour définir complétement un problème de Cauchy, on peut choisir $\alpha=1$, $\beta=3.5$, $t_0=0$, $T=100$ et $\boldsymbol{y}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Q. 2 L'algorithme pour la fonction REDEUPVEC est :

Algorithme 8 Fonction REDEUPVEC : résolution d'un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'Euler progressif

---

Données :
- $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f}: [t^0, t^0+T]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
- t^0 : réel, temps initial
- T : réel >0
- y^0 : un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale
- N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat :
- $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$
- $\boldsymbol{Y}$: tableau de m lignes et $N+1$ colonnes $\boldsymbol{Y}(:,n) = \boldsymbol{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$

```
1: Fonction [t, Y] ← REDEUPVEC ( f, t^0, T, y^0, N )
2:   t ← DisReg(t^0, t^0 + T, N)
3:   h ← (b − a)/N
4:   Y(:, 1) ← y^0
5:   Pour n ← 1 à N faire
6:     Y(:, n + 1) ← Y(:, n) + h ∗ f(t(n), Y(:, n))
7:   Fin Pour
8: Fin Fonction
```

Q. 3 Il faut tout d'abord écrire la fonction FCAUCHY correspondant à la fonction f:

Algorithme 9 Fonction fCauchy : fonction f du problème de Cauchy associé à $(\mathcal{P})$

Données : t : un réel
$\boldsymbol{y}$: un vecteur de $\mathbb{R}^2$
Résultat : $\boldsymbol{z}$: un vecteur de $\mathbb{R}^2$

Fonction $\boldsymbol{z} \leftarrow$ fCauchy $(t, \boldsymbol{y})$
  $\alpha \leftarrow 1,\ \beta \leftarrow 3.5$
  $\boldsymbol{z}(1) \leftarrow 1 + \alpha \boldsymbol{y}(1)^2 * \boldsymbol{y}(2) - (\beta+1)\boldsymbol{y}(1)$
  $\boldsymbol{z}(2) \leftarrow -\alpha \boldsymbol{y}(1)^2 * \boldsymbol{y}(2) + \beta \boldsymbol{y}(1)$
Fin Fonction

L'algorithme de résolution est :

Algorithme 10 résolution numérique du problème $(\mathcal{P})$

$\boldsymbol{y}^0 \leftarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}] \leftarrow$ REDEUPvec$(fCauchy, 0, 100, \boldsymbol{y}^0, 1000)$
Plot$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}(1,:))$ ▷ Représentation de X
Plot$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}(2,:))$ ▷ Représentation de Y

■