Examen du 30 août 2012

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1 : E.D.O.

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 4 :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Donner, en détaillant, la définition d'un problème de Cauchy vectoriel.* ▪

Q. 2
1. *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 4 associé au tableau de Butcher (3).*
2. *Expliquer de manière détaillée l'utilisation de ce schéma pour la résolution d'un problème de Cauchy.* ▪

Q. 3 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RED4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 4 précédent.* ▪

Q. 4 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab* RED4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 4 précédent.* ▪

Application : On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3.

La masse des ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.

Le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps est donnée par

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}(t) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad (4)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}(t) = k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t). \quad (5)$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements respectifs des blocs m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre au cours du temps (voir figure 2).

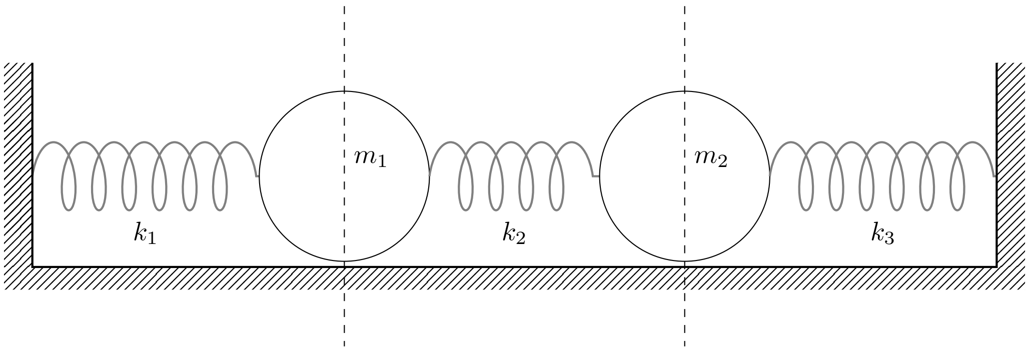

Figure 1: Positions d'équilibre

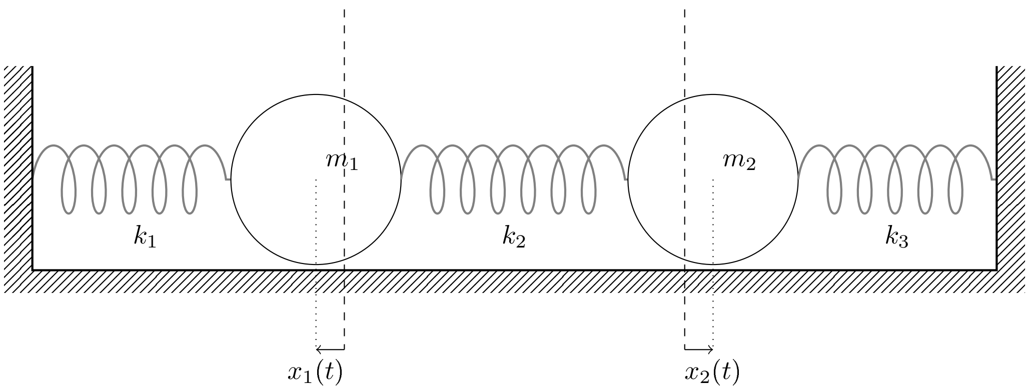

Figure 2: En mouvement

On souhaite résoudre numériquement ce problème pour le cas où :

- le bloc de masse m_1 est en position -0.5 par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial $t = 0$,
- le bloc de masse m_2 est en position $+0.5$ par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial.

Q. 5 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy vectoriel associé à ce problème.* ▪

Q. 6 (Matlab) *Ecrire un programme permettant de résoudre ce problème de Cauchy par le schéma d'ordre 4 précédent et de représenter les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (Utiliser au maximum les fonctions).* ▪

EXERCICE 2 : E.D.P.

Soit le problème suivant

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + \nu u'(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (1)\\
u(a) &= \alpha, & (2)\\
u'(b) &= \beta. & (3)
\end{aligned}
$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites? ▪

Q. 2 *Construire une discrétisation de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.* ▪

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + c_i u_i = f_i. \tag{4}
$$

Q. 3 *1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*

2. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ▪

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{b} \tag{5}
$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$ (préciser les dimensions). ▪

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)* ▪